Dra. Lizeth Torres

Universidad Nacional Autónoma de México

4 de septiembre de 2017

Contenido

Sistemas y clasificación de sistemas

Los sistemas físicos son un conjunto de componentes o bloques funcionales interconectados para alcanzar un objetivo deseado.

Un sistema es un modelo matemático que relaciona las señales de entrada (excitaciones) al sistema con sus señales de salida (respuestas).

Sistemas y clasificación de sistemas

Los sistemas físicos son un conjunto de componentes o bloques funcionales interconectados para alcanzar un objetivo deseado.

Un sistema es un modelo matemático que relaciona las señales de entrada (excitaciones) al sistema con sus señales de salida (respuestas).

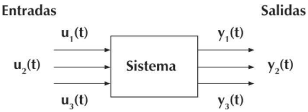
Sistemas y clasificación de sistemas

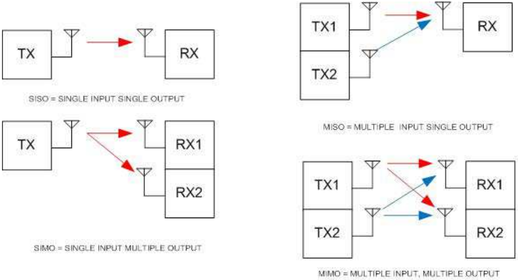
Si x y y son las señales de entrada y de salida respectivamente, de un sistema, entonces el sistema se considera como una transformación de x en y. Esta representación se denota por

$$y = T[x]$$

donde T es el operador que representa alguna regla bien definida mediante la cual la excitación x es transformada en la respuesta y.

Sistemas y clasificación de sistemas





Sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto

Un sistema en tiempo continuo es un sistema en el cual las señales de entrada y de salida son de tiempo continuo.

Si las señales de entrada y de salida son de tiempo discreto, entonces el sistema se llama un sistema en tiempo discreto.

$$x(t) \to y(t)$$

$$x[n] \to y[n]$$

Ejemplos:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

en la cual $x(t)$ es la entrada y y(t) es la salida y a, b son constantes.

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

Sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto

Un sistema en tiempo continuo es un sistema en el cual las señales de entrada y de salida son de tiempo continuo.

Si las señales de entrada y de salida son de tiempo discreto, entonces el sistema se llama un sistema en tiempo discreto.

$$x(t) \to y(t)$$

$$x[n] \to y[n]$$

Ejemplos:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

en la cual $x(t)$ es la entrada y y(t) es la salida y a, b son constantes.

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

Sistemas con y sin memoria

Se dice que un sistema es instantáneo o sin memoria si su salida en cualquier instante depende de su excitación en ese instante, no de ningún valor pasado o futuro de la entrada.

Si esto no es así, se dice que el sistema tiene memoria.

Ejemplo: Ley de Ohm

Un ejemplo de un sistema sin memoria es un resistor R; con la corriente $x(t)$ tomada como entrada y el voltaje tomado como la salida $y(t)$, la relación de entrada-salida para el resistor es:

$$y(t) = Rx(t)$$

Sistemas con y sin memoria

Se dice que un sistema es instantáneo o sin memoria si su salida en cualquier instante depende de su excitación en ese instante, no de ningún valor pasado o futuro de la entrada.

Si esto no es así, se dice que el sistema tiene memoria.

Ejemplo: Ley de Ohm

Un ejemplo de un sistema sin memoria es un resistor R; con la corriente $x(t)$ tomada como entrada y el voltaje tomado como la salida $y(t)$, la relación de entrada-salida para el resistor es:

$$y(t) = Rx(t)$$

Sistemas con y sin memoria

Un sistema que no es instantáneo se dice dinámico y que tiene memoria

Ejemplo

Un capacitor C con la corriente como la entrada $x(t)$ y el voltaje como la salida $y(t)$; entonces,

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Ejemplo: Acumulador

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$$

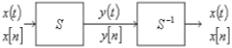
Ejemplo: Retardo

$$y[n] = x[n-1]$$

Invertibilidad y sistemas inversos

Se dice que un sistema es invertible si excitaciones distintas producen respuestas distintas.

Si un sistema es invertible, entonces existe un sistema inverso, el cual, al ser excitado con la salida del sistema invertible, reproduce la señal original; es decir, en un sistema invertible siempre es posible recuperar la entrada si se conoce la salida.



Ejemplo

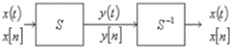
$$y(t) = 2x(t), y(t) = x^2(t)$$

Invertible, No invertible.

Invertibilidad y sistemas inversos

Se dice que un sistema es invertible si excitaciones distintas producen respuestas distintas.

Si un sistema es invertible, entonces existe un sistema inverso, el cual, al ser excitado con la salida del sistema invertible, reproduce la señal original; es decir, en un sistema invertible siempre es posible recuperar la entrada si se conoce la salida.



Ejemplo

$$y(t) = 2x(t), y(t) = x^2(t)$$

Invertible, No invertible.

Sistemas causales

El término causalidad connota la existencia de una relación causa-efecto.

Se dice que un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo arbitrario depende solamente de los valores de la entrada en ese instante y en el pasado.

A estos sistemas también se les refiere como no anticipativos, ya que el sistema no anticipa, ni depende de valores furturos de la entrada.

Ejemplo: Sistemas no causales

$$y(t) = x(t+1)$$

Sistemas causales

El término causalidad connota la existencia de una relación causa-efecto.

Se dice que un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo arbitrario depende solamente de los valores de la entrada en ese instante y en el pasado.

A estos sistemas también se les refiere como no anticipativos, ya que el sistema no anticipa, ni depende de valores furturos de la entrada.

Ejemplo: Sistemas no causales

$$y(t) = x(t+1)$$

Sistemas causales

El término causalidad connota la existencia de una relación causa-efecto.

Se dice que un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo arbitrario depende solamente de los valores de la entrada en ese instante y en el pasado.

A estos sistemas también se les refiere como no anticipativos, ya que el sistema no anticipa, ni depende de valores furturos de la entrada.

Ejemplo: Sistemas no causales

$$y(t) = x(t+1)$$

Sistemas estables

Un sistema estable es aquél en el cual pequeñas excitaciones producen respuestas que no divergen (no aumentan sin límite).

Estabilidad

Un sistema es estable si para una entrada acotada, la salida correspondiente también está acotada. Es decir, si la entrada está definida por

$$|x| \leq k_1$$

entonces las salida está definida por

$$|y| \leq k_2$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales finitas.

Sistemas estables

Un sistema estable es aquél en el cual pequeñas excitaciones producen respuestas que no divergen (no aumentan sin límite).

Estabilidad

Un sistema es estable si para una entrada acotada, la salida correspondiente también está acotada. Es decir, si la entrada está definida por

$$|x| \leq k_1$$

entonces las salida está definida por

$$|y| \leq k_2$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales finitas.

Invariabilidad en el tiempo

Un sistema es invariable en el tiempo si un desplazamiento en el tiempo (retraso o avance) en la señal de entrada resulta en un desplazamiento igual en la señal de salida.

$$x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

$$x[n - n_0] \to y[n - n_0]$$

Ejemplos

$y(t) = \sin(x(t))$ ==> Invariante
$y[n] = nx[n]$ ==> Variante

TIPS

Los sistemas invariantes tienen parámetros/coeficientes constantes (e.g. R: Resistencia, C: Capacitancia, k: Rigidez). Los sistemas variantes tienen al tiempo como coeficiente o coeficientes depedientes del tiempo.

Invariabilidad en el tiempo

Un sistema es invariable en el tiempo si un desplazamiento en el tiempo (retraso o avance) en la señal de entrada resulta en un desplazamiento igual en la señal de salida.

$$x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

$$x[n - n_0] \to y[n - n_0]$$

Ejemplos

$y(t) = \sin(x(t))$ ==> Invariante
$y[n] = nx[n]$ ==> Variante

TIPS

Los sistemas invariantes tienen parámetros/coeficientes constantes (e.g. R: Resistencia, C: Capacitancia, k: Rigidez). Los sistemas variantes tienen al tiempo como coeficiente o coeficientes depedientes del tiempo.

Sistemas lineales

Un sistema lineal, en tiempo continuo o discreto, es aquél que posee la importante propiedad de la superposición. Entonces un sistema es lineal si

1. La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$. Propiedad de aditividad.
2. La respuesta a $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, donde α es cualquier constante. Propiedad de homogeneidad o escalamiento.

Ejemplo

$$y = ax + b$$

donde a y b son constantes. Si $b \neq 0$, el sistema es no lineal porque $x = 0$ implica que $y = b \neq 0$ (propiedad de homogeneidad). Si $b = 0$, el sistema es lineal.

Sistemas lineales

Un sistema lineal, en tiempo continuo o discreto, es aquél que posee la importante propiedad de la superposición. Entonces un sistema es lineal si

1. La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$. Propiedad de aditividad.
2. La respuesta a $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, donde α es cualquier constante. Propiedad de homogeneidad o escalamiento.

Ejemplo

$$y = ax + b$$

donde a y b son constantes. Si $b \neq 0$, el sistema es no lineal porque $x = 0$ implica que $y = b \neq 0$ (propiedad de homogeneidad). Si $b = 0$, el sistema es lineal.

Ejercicios

Diga si los siguientes sistemas son lineales o no, causales o no, variables en el tiempo o no, tienen memoria o no.

1. $y(t) = tx(t)$
2. $y[n] = x^2[n]$
3. $y(t) = x(t-a)$
4. $\dot{y}(t) + ay(t) = bx(t)$
5. $\dot{y}(t) + ay^2(t) = bx(t)$
6. $y(t) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)d\tau$

Determine cuáles de los siguientes sistemas son invertibles y cuáles no los son.

Ejercicios

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$
2. $y(t) = x^n(t)$
3. $y(t) = x(3t - 6)$
4. $y(t) = \cos[x(t)]$

Operaciones y transformaciones de las señales

Suma

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ señales continuas, entonces

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

es la suma de ambas

Multiplicación

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ señales continuas, entonces

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

es la multiplicación de ambas

Operaciones y transformaciones de las señales

Escalamiento en amplitud

Sea $x(t)$ una señal continua, entonces

$$y(t) = cx(t)$$

está escalada (amplificada o atenuada) por un factor de escalamiento c.

Derivación

Sea $x(t)$ una señal continua, entonces

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

está derivada con respecto al tiempo.

Operaciones y transformaciones de las señales

Integración

Sea $x(t)$ una señal continua, entonces

$$y(t) = \int^{t} x(\tau)d\tau$$

está integrada con respecto al tiempo.

Escalamiento en tiempo

Sea $x(t)$ una señal continua, entonces su escalamiento en tiempo se define

$$y(t) = x(at).$$

Si $a > 1$ tenemos una versión comprimida de $x(t)$.
Si $0 < a < 1$, tenemos una versión expandida de $x(t)$.