Sistemas y Señales

Dra. Lizeth Torres

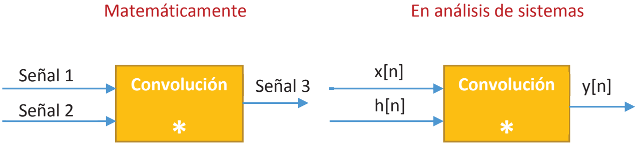
Universidad Nacional Autónoma de México

9 de mayo de 2018

Contenido

¿Qué es la convolución?

La convolución es una operación matemática que combina dos señales para producir una tercer señal.



Conceptos previos

Un sistema es lineal es aquél que posee la propiedad de la superposición. En forma más precisa, en tiempo continuo, si $y_1(t)$ es la respuesta a la entrada $x_1(t)$, y $y_2(t)$ es la respuesta a $x_2(t)$, entonces el sistema es lineal si:

- La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$. Propiedad de aditividad.
- La respuesta $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, donde α es cualquier constante. Propiedad de homogeneidad o de escalamiento.

Conceptos previos

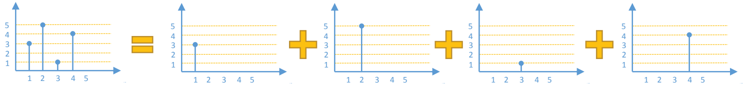
La función impulso $\delta(t)$, también conocida como función delta de Dirac, es una señal de area unitaria con valor es cero en todas partes excepto en el origen donde vale 1, i.e.,

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Podemos desplazar y escalar esta función delta. Por ejemplo, si tenemos una señal $s[n]$ que vale -3 en $n = 5$ y vale cero en cualquier otro punto, entonces se puede expresar como una función delta desplazada 5 muestras hacia la derecha, y escalada por un factor de -3. Es decir $s[n] = -3\delta[n-5]$ es un impulso desplazado y escalado.

Conceptos previos

Una vez que comprendemos el efecto de desplazar y escalar la función delta, podemos descomponer cualquier señal en una sumatoria de impulsos (funciones delta desplazadas y escaladas).



Conceptos previos

Imaginemos que tenemos un sistema lineal cualquiera. Si en la entrada de dicho sistema ponemos una señal cualquiera, el sistema nos devolverá una señal salida, la cual dependerá exclusivamente de qué haga el sistema internamente. Es decir, que distintos sistemas nos pueden dar distintas respuestas ante la misma entrada.

En el caso particular de que la entrada sea el impulso unitario la salida del sistema se llamará *respuesta al impulso* y se denota como $h[n]$.

Conceptos previos

Lo interesante de esto, es que si la entrada al sistema es un impulso unitario desplazado y escalado, entonces la salida será la respuesta al impulso, pero igualmente desplazada y escalada que la entrada.

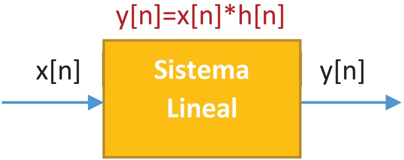
Si además, recordamos que cualquier señal puede expresarse como una sumatoria de impulsos, podemos conocer la respuesta del sistema a cada uno de esos impulsos.

Y si además, sumamos todas estas respuestas a cada impulso, entonces obtendremos la respuesta del sistema a la señal original.

Conceptos previos

¿Cuál es el beneficio de todo esto? Poder predecir la salida de cualquier sistema lineal con solo conocer su respuesta al impulso unitario, $h[n]$, sin necesidad de introducir realmente una señal de entrada al sistema; sino que se descompone esa señal en impulsos, se evalua la respuesta del sistema para cada impulso (escalamos y desplazamos $h[n]$ según cada impulso) y luego se suman esas respuestas.

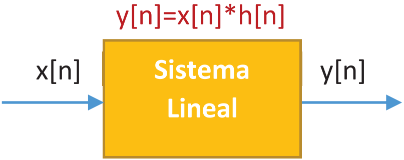
¡Todo este proceso, no es más que la convolución de $h[n]$ y la señal de entrada! La convolución se representa con una estrella *.



Conceptos previos

¿Cuál es el beneficio de todo esto? Poder predecir la salida de cualquier sistema lineal con solo conocer su respuesta al impulso unitario, $h[n]$, sin necesidad de introducir realmente una señal de entrada al sistema; sino que se descompone esa señal en impulsos, se evalua la respuesta del sistema para cada impulso (escalamos y desplazamos $h[n]$ según cada impulso) y luego se suman esas respuestas.

¡Todo este proceso, no es más que la convolución de $h[n]$ y la señal de entrada! La convolución se representa con una estrella *.

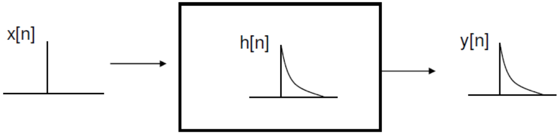


Convolución en tiempo discreto

x[n]: entrada al sistema.

h[n]: respuesta al impulso del sistema.

y[n]: salida del sistema a la entrada x[n].



Sistema LTI

Convolución en tiempo discreto

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$
$$a.x_1[n] + b.x_2[n] \rightarrow a.y_1[n] + b.y_2[n]$$

Linealidad

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n-k] \rightarrow y[n-k]$$

Invariancia temporal

Convolución en tiempo discreto: Definición

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]h[k]$$

Convolución en tiempo discreto: Ejercicio 1

Encuentre la convolución entre $x[n] = [3, 2, 1, 0]$ y $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ para obtener $y[n]$. A partir de la serie

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k],$$

podemos calcular cada uno de los valores de $y[n]$ de la siguiente manera

$$\sum_{k=0}^{n=0} x[k]h[n-k] = x[0]h[0] = (3)(1/2)^0 = (3)(1) = 3$$

$$\sum_{k=0}^{n=1} x[k]h[n-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = (3)(1/2)^1 + (2)(1/2)^0$$

$$= (3)(1/2) + (2)(1) = (3/2) + 2 = 7/2$$

Convolución en tiempo discreto: Ejercicio 1

$$\sum_{k=0}^{n=2} x[k]h[n-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0]$$

$$= (3)(1/2)^2 + (2)(1/2)^1 + (1)(1/2)^0 = 11/4$$

$$\sum_{k=0}^{n=3} x[k]h[n-k] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] = 3/8 + 2/4 + 1/2 + 0 = 11/8$$

Entonces,

$$y[n] = [3, 7/2, 11/4, 11/8, 11/16, ..., 11/2^k, ...]$$

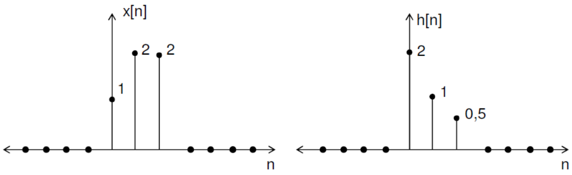
Convolución en tiempo discreto: Ejercicio 2

Un sistema discreto tiene la siguiente respuesta al impulso

$$h[n] = [2, 1, 0.5],$$

encuentre la salida del sistema cuando la señal de entrada es:

Entrada: x[n] = [1, 2, 2]



Convolución en tiempo discreto: Método Matricial

y[0] = h[0].x[0]
y[1] = h[1].x[0] + h[0].x[1]
y[2] = h[2].x[0] + h[1].x[1] + h[0].x[2]
y[3] = h [3].x[0] + h[2].x[1] + h[1].x[2] + h[0].x[3]
...

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & .. \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & .. \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & .. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

y = **H**.x

La integral de convolución

Convolución

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones. La convolución de f y g, denotada $f * g$, es la función en $t \geq 0$ dada por

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ejemplo 1

Sea $f(t) = e^{3t}$ y $g(t) = e^{7t}$, entonces

$$f(\tau) = e^{3\tau}, g(t-\tau) = e^{7(t-\tau)}$$

La convolución se calcula entonces

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{3\tau}e^{7(t-\tau)}d\tau$$

$$= \int_0^t e^{3\tau}e^{7t}e^{-7\tau}d\tau = e^{7t}\int_0^t e^{3\tau}e^{-7\tau}d\tau$$

$$= e^{7t}\int_0^t e^{-4\tau}d\tau = e^{7t}\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4\tau}\Big|_0^t$$

...

La integral de convolución

Ejemplo 1

...

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{4}\right) e^{7t} e^{-4t} - \left(-\frac{1}{4}\right) e^{7t} e^{-4.(0)} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right) e^{3t} + \left(\frac{1}{4}\right) e^{7t} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right) \left(e^{7t} - e^{3t}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Sea $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ y $g(t) = t^2$, entonces

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}, g(t-\tau) = (t-\tau)^2$$

La convolución se calcula entonces

$$f * g = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}(t-\tau)^2 d\tau = \int_0^t \tau^{-1/2}(t^2 - 2t\tau + \tau^2) d\tau$$

$$= \int_0^t (t^2\tau^{-1/2} - 2t\tau^{1/2} + \tau^{3/2}) d\tau$$

...

La integral de convolución

Ejemplo 2

...

$$= 2t^2\tau^{1/2} - 2t\frac{2}{3}\tau^{3/2} + \frac{2}{5}\tau^{5/2}\Big|_0^t$$

$$2t^2t^{1/2} - \frac{4}{3}tt^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2} = \frac{16}{15}t^{5/2}$$

Propiedades de la convolución

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[0, +\infty[$, entonces

1. $f * g = g * f$ (ley conmutativa)
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (ley distributiva)
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (ley asociativa)
4. $f * 0 = 0 * f = 0$

Propiedades de la convolución

Ejercicios

- Verificar que $e^t * t = e^t - t - 1$
- Calcular $\sin \omega t * \cos \omega t$ (utilice cualquiera de las siguientes identidades:
  $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$ ó
  $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$) (R=$\frac{1}{2} t \sin(\omega t)$)

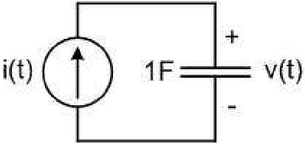
Respuesta de Sistemas Lineales e invariantes

La salida (respuesta) de un sistema con entrada $u(t)$ puede expresarse como

$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{Respuesta\ de\ entrada\ zero} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau}_{Respuesta\ de\ estado\ zero}$$

> Respuesta de un sistema=Respuesta a las condiciones iniciales + Respuesta a la excitación (entrada).

Respuesta de Sistemas Lineales e invariantes



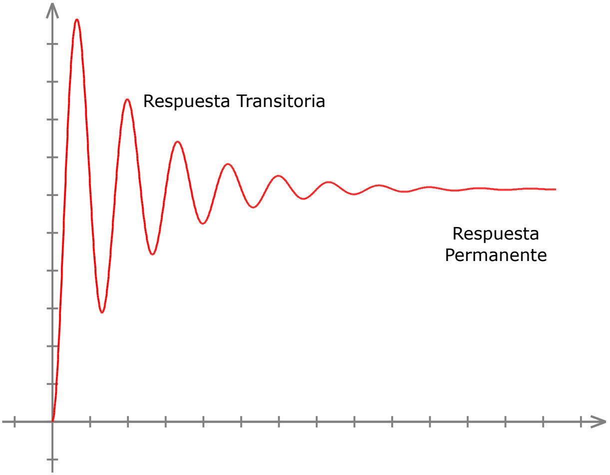
$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau$$

Respuesta transitoria y respuesta permanente

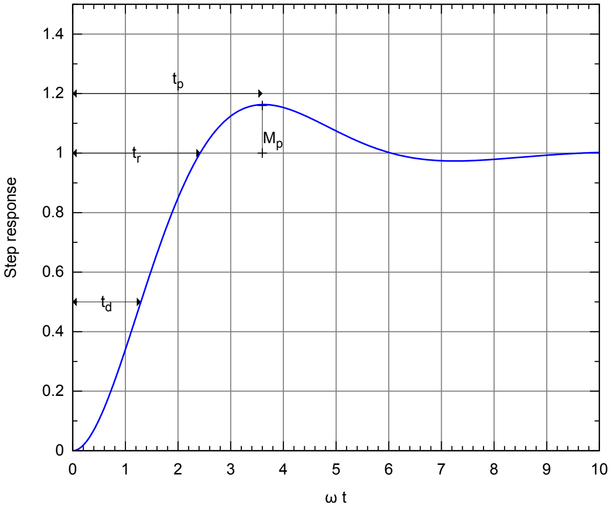
Respuesta de un sistema

- Respuesta Transitoria: Cuando el sistema está en equilibrio.
- Respuesta Permanente: Cuando el sistema se mueve del punto de equilibrio o 'arranca' de condiciones iniciales diferentes al punto de equilibrio.

Respuesta transitoria y respuesta permanente



Respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón



Respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón

- Rise time (Tiempo de subida): se refiere al tiempo requerido para que la respuesta del sistema cambie de un valor bajo especificado a un valor alto especificado. Típicamente, estos valores van del 10 % al 90 % de la respuesta permanente.
- Settling time (Tiempo de asentamiento o estado estable): Es el tiempo en el que la respuesta alcanza el estado permanente.
- Overshoot (Sobretiro): es la diferecia entre la respuesta permanente (en equilibrio) y el valor máximo de cada vez que la respuesta del sistema sobrepasa el valor de la respuesta permanente.
- Overshoot time (Tiempo de sobretiro): es el momento en que la respuesta del sistema excede por primera vez el valor de la respuesta permanente antes de alcanzarla.
- Delay time (Tiempo de retaro): es el tiempo en el que la respuesta del sistema alcanza la mitad del valor de la respuesta permanente por primera vez.