Modelos del flujo en conductos de agua

Dra. Lizeth Torres

Cátedras CONACyT,
II-UNAM

23-25 enero de 2019

Resumen

Contenido

1. Modelos de flujo en conductos de agua
   - Modelo elástico
   - Modelo rígido
   - Modelo en estado estacionario
2. Modelos de flujo en redes hidáulicas

Modelos de flujo en conductos de agua

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

Suposiciones de modelado

- El flujo es unidimensional.
- La velocidad del flujo es pequeña en comparación con la velocidad de celeridad de la onda de presión.
- El líquido es un fluido de baja compresión: se deforma elásticamente ante cambios bruscos de presión con cambios insignificantes de su densidad.
- La pared de la tubería se deforma ante cambios bruscos de presión según la teoría elástica de la deformación.

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA_r \frac{\partial H}{\partial z} + J_s(Q, \theta) = 0$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

La ecuación de movimiento define la evolución temporal del flujo en el espacio.

La ecuación de continuidad establece que la tasa a la que la masa entra en un sistema es igual a la tasa a la que la masa deja el sistema mas la acumulación de masa dentro dentro del sistema.

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA_r \frac{\partial H}{\partial z} + J_s(Q, \theta) = 0$$

Ecuación de continuidad:

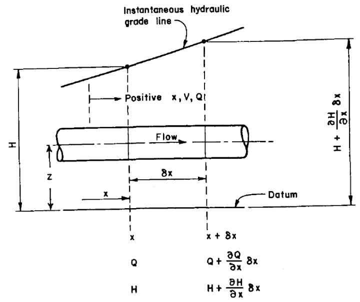
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$Q(z,t)$: Flujo volumétrico, $H(z,t)$: Carga de presión.
A_r: Área transversal del ducto, b: Celeridad de la onda de presión,
g: Aceleración gravitacional.
$J_s(Q(z,t), \theta)$: Función que representa la pérdida de energía en la tubería.
θ: Conjunto de parámetros relacionados con las características del fluido y de la tubería.

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

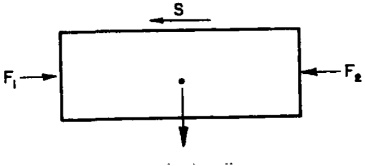
$$F = ma = m\dot{V}$$



Si el cabezal de presión y la velocidad a una distancia z son H y V. Los valores correspondientes a $z + \delta z$ son: $H + (\partial H/\partial z)\delta z$ y $V + (\partial V/\partial z)\delta z$.

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

Sobre el eje z, tres fuerzas están actuando sobre el elemento diferencial: F_1, F_2 y S. Las dos primeras fuerzas son debidas a la presión mientras que la tercera fuerza es la fuerza de cizallamiento entre dos superficies debido a la fricción viscosa.



$$F_1 = \gamma \mathcal{V} = \gamma A_r (H - y)$$
$$F_2 = \gamma \mathcal{V} = \gamma A_r (H + (\partial H/\partial z)\delta z - y)$$
$$S = \gamma \delta z J_s^V (V, \theta)$$

La fuerza resultante actuando sobre el elemento es:

$$F = F_1 - F_2 - S$$

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

$$F = -\gamma A_r \frac{\partial H}{\partial z}\delta z - \gamma \delta z J_s^V(V,\theta)$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton: $F = m\dot{V}$.

Dado que la masa es $m = \frac{\gamma}{g} A_r \delta z$, entonces

$$\frac{dV}{dt} = -g\frac{\partial H}{\partial z} - J_s^V(V,\theta)$$

La derivada total es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Entonces

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g\frac{\partial H}{\partial z} - J_s^V(V,\theta) - V\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Modelo elástico (Modelo del golpe de ariete)

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial z} + J_s^V(V, \theta) = 0$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{b^2}{g}\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Dado que $Q = VA_r$.

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA_r\frac{\partial H}{\partial z} + J_s(Q, \theta) = 0$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r}\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

Modelo rígido

Suposiciones de modelado

- La paredes de la tubería son rígidas.
- El fluido es incompresible[a].

[a] La densidad del fluido no varía en función de la posición

Bajo estas suposiciones, la celeridad tiende a infinito (i.e. $b \longrightarrow \infty$) por lo que, a partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{gA_r}{b^2}\frac{\partial H}{\partial t},$$

se puede deducir que el flujo volumétrico no varía en el espacio, i.e.

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

Modelo rígido

Entonces el flujo solo depende del tiempo y la ecuación de movimiento se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dQ}{dt} + gA_r \frac{dH}{dz} + J_s(Q, \theta) = 0.$$

Integrando los diferenciales del gradiente de presión

$$\int_{H_{in}}^{H_{out}} dH = H_{out} - H_{in}, \quad \int_0^L dz = L - 0,$$

se tiene

$$\frac{dQ}{dt} + gA_r \frac{H_{out} - H_{in}}{L} + J_s(Q, \theta) = 0.$$

Modelo en estado estacionario

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA_r \frac{\partial H}{\partial z} + J_s(Q, \theta) = 0$$

Suposiciones de modelado

Si los cambios de velocidad son ignorados: $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$

$$gA_r \frac{\partial H}{\partial z} + J_s(Q, \theta) = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\Phi_s(Q, \theta)$$

Modelo en estado estacionario

$$\frac{dH}{dz} = -\Phi_s(Q, \theta)$$

$$\int_{H_k}^{H_{k+1}} dH = H_{k+1} - H_k = \bar{\Delta} H \qquad \int_0^L dz = L - 0 = \Delta z$$

$$\Delta H = -\bar{\Delta} H$$

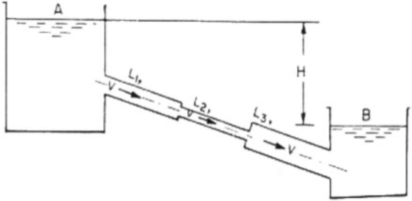
$$\frac{\Delta H}{\Delta z} = \Phi_s(Q, \theta)$$

$$\Delta H = \Phi_s(Q, \theta)\Delta z$$

$\boxed{\Delta H}$ es el diferencial de presión, la caída de presión ó la pérdida de carga.
$\boxed{\Phi_s(Q, \theta)}$ es una función que representa la pérdida de energía por unidad de longitud en estado estacionario..

Ejemplo: Modelo en estado estacionario de tuberías en serie

Para modelar un sistema de tuberías en serie con diferentes valores de diámetro, longitud y rugosidad, se puede aplicar la siguiente restricción de esfuerzo (inspirada en la 2da ley de Kirchoff):



La caída de presión total es igual a la suma de caídas de presión de cada tubería.

La suma de los diferenciales de presión de cada tubería es igual al diferencial de presión total.

Tuberías en serie

$$\Delta H_T = \sum_{k=1}^{N} \Delta H_k$$

Dado que la pérdida de carga se expresa como

$$\Delta H = \Phi_s(Q, \theta)\Delta z,$$

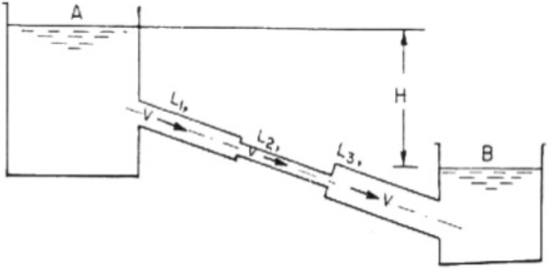
la restricción de esfuerzo para tuberías en serie se puede expresar de la siguiente manera:

Tuberías en serie

$$\Delta H_T = \sum_{k=1}^{N} \Phi_s^k(Q, \theta_k)\Delta z_k$$
$$Q = Q_1 = Q_2 = ... = Q_N$$

Para 3 tuberías en serie:

$$\Delta H_T = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$
$$\Delta H_T = \Phi_s^1(Q, \theta_1)\Delta z_1 + \Phi_s^2(Q, \theta_2)\Delta z_2 + \Phi_s^3(Q, \theta_3)\Delta z_3$$



Tuberías en paralelo

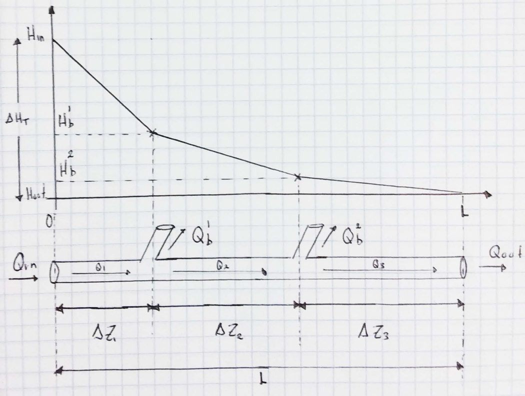
Balance de pérdidas de carga

$$\Delta H_T = \Delta H_1 = \Delta H_2 = ... = \Delta H_N$$

Balance de flujos

$$Q_T = \sum_{k=1}^{N} Q_k$$

Ejemplo: Modelo en estado estacionario de una tubería con ramales



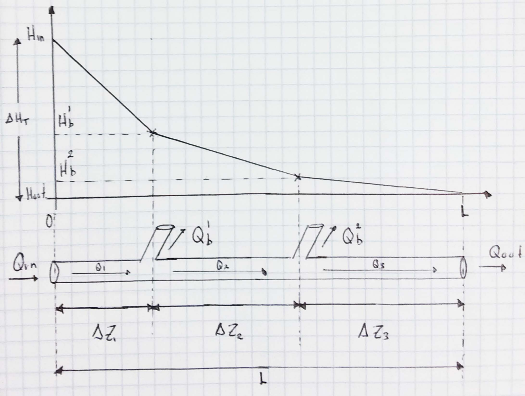
Tuberías con ramales

$$\Delta H_T = \sum_{k=1}^{N} \Delta H_k$$

$$\Delta H_T = \sum_{k=1}^{N} \Phi_s^k(Q_k, \theta_k)\Delta z_k$$

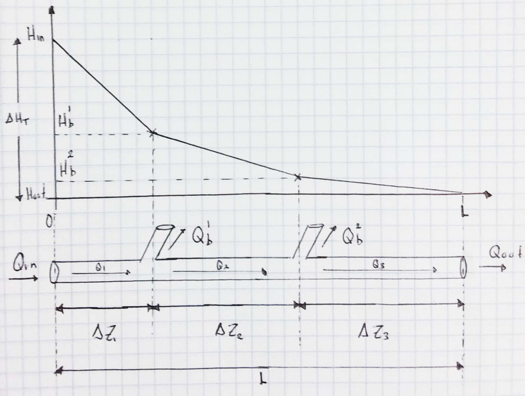
$$Q_{in} = Q_b^1 + Q_b^2 + ... + Q_b^M + Q_{out} = \sum_j^M Q_j + Q_{out}$$

- Δz_k es la sección k de tubería delimitada por dos ramales o por un extremo de la tubería y un ramal.
- Q_j es el flujo que sale por el ramal j.
- N es el número total de secciones.
- M es el número total de ramales.



$$\Delta H_T = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$

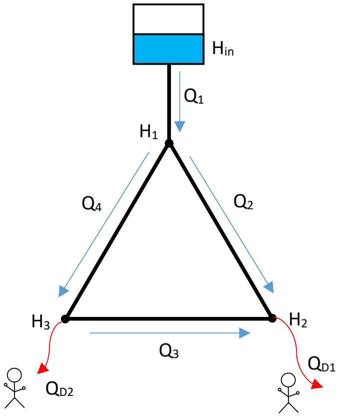
$$\Delta H_1 = H_{in} - H_b^1, \Delta H_2 = H_b^1 - H_b^2, \Delta H_3 = H_b^2 - H_{out}.$$



$$\Delta H_T = \Phi_s^1(Q_1, \theta_1)\Delta z_1 + \Phi_s^2(Q_2, \theta_2)\Delta z_2 + \Phi_s^3(Q_3, \theta_3)\Delta z_3$$

$$Q_1 = Q_{in}, Q_2 = Q_1 - Q_b^1, Q_3 = Q_2 - Q_b^2 = Q_{out}.$$

Modelo dinámico de una red



$K_i = \dfrac{f_i(Q_i)|Q_i|}{2\phi A}$, $\beta_i = \dfrac{gA}{L_i}$, α_i: factor de estabilidad/convergencia numérica.

Ec. para cada tubería de la red.

$$\dot{Q}_1 = -K_1 Q_1 + \beta_1 (H_{in} - H_1)$$
$$\dot{Q}_2 = -K_2 Q_2 + \beta_2 (H_1 - H_2)$$
$$\dot{Q}_3 = -K_3 Q_3 + \beta_3 (H_3 - H_2)$$
$$\dot{Q}_4 = -K_4 Q_4 + \beta_4 (H_1 - H_3)$$

Ec. para cada nodo de la red.

$$\dot{H}_1 = \alpha_1 (Q_1 - Q_2 - Q_4)$$
$$\dot{H}_2 = \alpha_2 (Q_2 + Q_3 - Q_{D1})$$
$$\dot{H}_3 = \alpha_3 (Q_4 - Q_3 - Q_{D2})$$

Modelo dinámico de una tubería

La topología de la red puede describirse por medio de la siguiente matriz de incidencia:

$$\mathbf{A}_{(i,j)} = \begin{cases} -1 & \text{si el flujo de la tubería } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{si la tubería } j \text{ no está conectada al nodo } i \\ 1 & \text{si el flujo de la tubería } j \text{ entra al nodo } i \end{cases} \quad (1)$$

Modelo dinámico de una tubería

$$\mathbf{A}_{(3,4)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

Ec. para cada tubería de la red.

$$\dot{Q}_1 = -K_1 Q_1 + \beta_1 (H_{in} - H_1)$$
$$\dot{Q}_2 = -K_2 Q_2 + \beta_2 (H_1 - H_2)$$
$$\dot{Q}_3 = -K_3 Q_3 + \beta_3 (H_3 - H_2)$$
$$\dot{Q}_4 = -K_4 Q_4 + \beta_4 (H_1 - H_3)$$

Ec. para cada nodo de la red.

$$\dot{H}_1 = \alpha_1 (Q_1 - Q_2 - Q_4)$$
$$\dot{H}_2 = \alpha_2 (Q_2 + Q_3 - Q_{D1})$$
$$\dot{H}_3 = \alpha_3 (Q_4 - Q_3 - Q_{D2})$$

Modelo dinámico de una tubería

$$\mathbf{A}_{(3,4)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} -\mathbf{K} & \Psi\mathbf{A} \\ -\Pi\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \Psi\mathbf{BC}_1 \\ \Pi\mathbf{BC}_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

donde

$\mathbf{K} = \mathtt{diag}(K_1, K2, K_3, K_4)$,

$\Psi = \mathtt{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$,

$\Pi = \mathtt{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,

$\mathbf{BC}_1 = (H_{in}, 0, 0, 0)^T$,

$\mathbf{BC}_2 = (0, Q_{D1}, Q_{D2})^T$,

$\mathbf{0}$: Matriz de ceros.