Dinámica de Sistemas Físicos - T4

(Tema 1, 2018)

Profesora: Dra. Lizeth Torres

ftorreso@iingen.unam.mx
http://lizeth-torres.info/

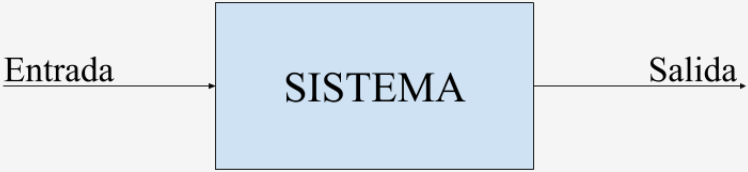
2nd November 2019

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Contenido

Concepto de Estado

Considérese un sistema, el cual puede ser representado en forma esquemática de la siguiente manera:



Si se desea determinar la salida producida por el sistema en n intervalo de tiempo (desde un t_0 hasta un tiempo t) es necesario conocer:

- 1. La entrada aplicada al sistema en el intervalo de tiempo.
- 2. Las condiciones iniciales (CI) del sistema.

Estas CI son lo que se conoce como el estado inicial del sistema . De esta manera se puede establecer que el estado del sistema es toda la información relevante acerca de la historia pasada del sistema.
El conocimiento del estado del sistema en un tiempo determinado $t_1 > t_0$ permite hacer una separación entre el comportamiento pasado u futuro del sistema.
El estado del sistema para un tiempo determinado t puede ser descrito mediante un grupo de parámetros denominados variables de estado, las que se representan por un vector de dimensión n de la forma:

$$x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; x_3(t) \;\; \dots \;\; x_n(t)]^T$$

Donde $x(t)$ es el vector de estado y $x_i(t)$ son las variables de estado.

Si se conoce el vector de estados para un tiempo inicial t_0 y el conjunto de entradas en forma de vector en el intervalo de tiempo dado , es posible determinar el vector de salidas y el vector de estados para el tiempo t_1. Esto puede expresarse matemáticamente por medio de las variables vectoriales $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$x(t_1) = g(t_0, t_1, x(t_0), u(t)_{[t_0,t_1]})$$

$$y(t_1) = h(t_1, x(t_1), u(t_1))$$

A partir de la penúltima ecuación se observa que el estado del sistema en el tiempo t_1 depende del tiempo inicial, de t_1 y de las entradas $u(t)$ aplicadas en el intervalo del tiempo dado.

De la última ecuación se tiene que las salidas producidas por el sistema en el tiempo t_1 dependen únicamente de dicho tiempo, el estado de éste en ese tiempo y las entradas aplicadas en ese tiempo.
De manera general, si se tiene lo siguiente:

$$t_0 > t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

Se puede expresar una ecuación general de la siguiente manera:

$$x(t_n) = g(t_{n-1}, t_n, g(t_{n-2}, t_{t-1}, x(t_{n-2}), u(t)_{[t_{n-2}, t_{n-1}]}), u(t)_{[t_{n-1}, t_n]})$$

Esta ecuación es válida para valores de n mayores o iguales a n. Básicamente, para sistemas dinámicos, continuos y de parámetros concentrados, la representación matemática del estado del sistema se puede expresar mediante una ecuación diferencial matricial de primer orden de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Y la salida del sistema como una ecuación algebráica matricial de la forma:

$$y(t) = \tilde{g}(x(t), u(t), t)$$

Ecuaciones de estado de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Existen varios procedimientos para la obtención de las ecuaciones de estado de sistemas dinámicos. Estos son:

- A) Directamente, a partir del sistema que se desea modelar y
- B) a partir del modelo matemático del sistema expresado mediante una ecuación diferencial de orden n.

Para la opción A, se deben aplicar directamente los principios y leyes físicas que definen el comportamiento de los elementos que integran al sistema, y posteriormente se pueden plantear las ecuaciones de estado.
Lo que verdaderamente nos interesa es la opción B.

Obtención de las ecuaciones de estado a partir de una ecuación diferencial de orden *n*.

Considérese el modelo matemático de un sistema, representado por una ecuación diferencial:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x = b_0 u^n+b_1 u^{n-1}+\ldots+b_{n-1}u+b_n u \tag{1}$$

Donde x es la variable de interés y u es la entrada aplicada al sistema. Se requiere obtener una representación matemática a partir de (1) de la forma:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2}$$

Considérese ahora el caso más sencillo. Esto es cuando la ecuación (1) no incluye derivadas de orden superior a la entrada aplicada al sistema. De esta manera, $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$ y $b_n = b \neq 0$, de donde se obtiene:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_u \tag{3}$$

Haciendo las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{dx}{dt} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} \\ x_n &= \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

A partir del sistema de ecuaciones (4), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \frac{d^n x}{dt^n} \end{aligned} \tag{5}$$

Por otro lado, despejamos de (3) $\frac{d^n x}{dt^n}$:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} - a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} - \ldots - a_{n-1} \frac{dx}{dt} - a_n x + bu \tag{6}$$

De (5) y (6):

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu \tag{7}$$

Sustituyendo (7) en (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu \tag{8}$$

La ecuación anterior se puede expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \\ b \end{bmatrix} u \tag{9}$$

De la ecuación anterior se tiene:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B=}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix}^T$$

$$u(t) = u \tag{10}$$

Considérese ahora el caso general, donde el sistema incluye derivadas de orden superior de la entrada. El modelo matemático es:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x = b_0 u^n+b_1 u^{n-1}+\ldots+b_{n-1}u+b_n u \tag{11}$$

En este caso, se debe obtener una representación matemática de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{12}$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} u(t)$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = x_2 + c_1 u \\
\dot{x}_2 = x_3 + c_2 u \\
\dot{x}_3 = x_4 + c_3 u \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n + c_{n-1} u
\end{gathered}$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + c_n u \tag{13}$$

De la ecuación (13) se conocen los coeficientes a_i para i=1,2,3,...n y los coeficientes c_i para i=1,2,3,...n se desconocen, por lo tanto es necesario determinarlos mediante un sistema de n ecuaciones. Este procedimiento se explica mejor con un ejemplo:

Considérese el modelo matemático de un sistema dinámico descrito por la ecuación con $n = 4$:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a_1\frac{d^3x}{dt^3} + a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \overset{(4)}{u} + b_1 \overset{(3)}{u} + b_2 \ddot{u} + b_3 \dot{u} + b_4 u \quad (14)$$

De la ecuación (15) se obtiene que el modelo matemático en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_n 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} u(t) \tag{15}$$

De esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + c_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + c_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_4 + c_3 u \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = -a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 - a_1 x_4 + c_4 u \tag{16}$$

Aplicando la ecuación:

$$x = x_1 + c_0 u \tag{17}$$

Derivando la (17) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + c_0 \dot{u} \tag{18}$$

Y sustituyendo la primera de las ecuaciones (16) en la (18), se tiene:

$$\dot{x} = x_2 + c_0\dot{u} + c_1 u \tag{19}$$

En forma similar se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x} = x_3 + c_0\ddot{u} + c_1\dot{u} + c_2 u \tag{20}$$

$$\dddot{x} = x_4 + c_0\dddot{u} + c_1\ddot{u} + c_2\dot{u} + c_3 u \tag{21}$$

$$\overset{(4)}{x} = -a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 - a_1 x_4 + c_0\overset{(4)}{u} + c_1\dddot{u} + c_2\ddot{u} + c_3\dot{u} + c_4 u \tag{22}$$

Multiplicando las ecuaciones (17), (19), (20), (21) y (22) por a_4, a_3, a_2, a_1 y 1 respectivamente y sumándolas, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\overset{(4)}{x} + a_1\dddot{x} + a_2\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_4 x = & - a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 - a_1 x_4 + \\
& + c_0 \overset{(4)}{u} + c_1 \dddot{u} + c_2 \ddot{u} + c_3 \dot{u} + c_4 u + \\
& + a_1 x_4 + a_1 c_0 \dddot{u} + a_1 c_1 \ddot{u} + a_1 c_2 \dot{u} + a_1 c_3 u + \\
& + a_2 x_3 + a_2 c_0 \ddot{u} + a_2 c_1 \dot{u} + a_2 c_2 u + \\
& + a_3 x_2 + a_3 c_0 \dot{u} + a_3 c_1 u + \\
& + a_4 x_1 + a_4 c_0 u = \\
& = c_0 \overset{(4)}{u} + \\
& + (c_1 + a_1 c_0)\dddot{u} + \\
& + (c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)\ddot{u} + \\
& + (c_3 + a_1 c_2 + q_2 c_1 + a_3 c_0)\dot{u} + \\
& + (c_4 + a_1 c_3 + a_2 c_2 + a_3 c_1 + a_4 c_0) u
\end{aligned} \tag{23}
$$

Comparando las ecuaciones (14) y (23) se tiene que ambas son idénticas en su primer miembro, por lo tanto, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$
\begin{aligned}
&c_0 \overset{(4)}{u} + (c_1 + a_1 c_0)\dddot{u} + (c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)\ddot{u} + (c_3 + a_1 c_2 + q_2 c_1 + a_3 c_0)\dot{u} \\
&+ (c_4 + a_1 c_3 + a_2 c_2 + a_3 c_1 + a_4 c_0)u = b_0 \overset{(4)}{u} + b_1 \dddot{u} + b_2 \ddot{u} + b_3 \dot{u} + b_4 u
\end{aligned}
\tag{24}
$$

De donde se determinan los valore de c_0, c_1, c_2, c_3 y c_4 de la forma:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= b_0 \\
c_1 &= b_1 - a_1 c_0 \\
c_2 &= b_2 - a_1 c_1 - a_2 c_0 \\
c_3 &= b_3 - a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0 \\
c_4 &= b_4 - a_1 c_3 - a_2 c_2 - a_3 c_1 - a_4 c_0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

De esta manera, se tiene que los coeficientes c_i para el caso general, están dados por:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0 \\ c_k &= b_k - \sum_{i=1}^{k} a_i c_{k-i} \ \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots n \end{aligned} \tag{26}$$

Por lo tanto, si se desea representar un sistema en variables de estado a partir de una ecuación diferencial de orden n, del tipo de la ecuación (11), se puede emplear la ecuaciones (13) y (26).

Solución homogénea

La solución homogénea del siguiente conjunto de n ecuaciones de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

puede expresarse como una serie de potencias infinita de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_h = \underbrace{\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \ldots\right)}_{e^{\mathbf{A}t}} \mathbf{x}(0).$$

$$x_h = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

$$x_h = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \tag{2}$$

donde:

$e^{\mathbf{A}t}$ es la matriz exponencial de la matriz $\mathbf{A}$.

$\Phi(t)$ se conoce como matriz de transición de estados .

Solución particular

Ahora consideramos que la respuesta completa de un sistema lineal a una entrada $\mathbf{u}(t)$. Se considera primero un sistema de primer orden con una ecuación de estado $\dot{x} = ax + bu$ escrita de la forma:

$$\dot{x}(t) - ax = bu(t) \tag{3}$$

- Ambos lados de la ecuación se multiplican por el factor $e^{-\mathbf{A}t}$, tal que el término de la izquierda se vuelve una diferencial perfecta:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4}$$

- Se integra la ecuación anterior:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(\tau)\right) d\tau = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}0}\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{5}$$

Dado que $e^{-\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$ y $\left[e^{-\mathbf{A}t}\right]^{-1} = e^{\mathbf{A}t}$, la respuesta total del vector de estados puede escribirse de dos maneras:

1

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6}$$

2

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{7}$$

El segundo término, una integral de convolución, es la solución particular, i.e. la respuesta del sistema con condiciones iniciales cero. Evaluación de la integral de la segunda ecuación introduce integración matricial.

Para un sistema de orden n y de r entradas, la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ es de $n \times n$, $\mathbf{B}$ es de $n \times r$ y $\mathbf{u}(t)$ es una columna $r \times 1$. El producto $e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}$ es un columna $n \times 1$, y la solución para cada ecuación de estado implica una integración escalar sencilla.

Ejemplo 1

Respuesta total

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$5\dot{x}(t) + 7x(t) = 15; \quad x(0) = 4$$

$$\dot{x}(t) + \frac{7}{5}x(t) = \frac{15}{5}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{-\frac{7}{5}}_{a}x(t) + \underbrace{3}_{bu(t)}$$

Ejemplo 1

$$x(t) = e^{-\frac{7}{5}t}4 + \int_0^t e^{-\frac{7}{5}(t-\tau)}3d\tau$$

$$x(t) = 4e^{-\frac{7}{5}t} + 3e^{-\frac{7}{5}t}\int_0^t e^{\frac{7}{5}\tau}3d\tau$$

$$x(t) = 4e^{-\frac{7}{5}t} + 3e^{-\frac{7}{5}t}\left(\frac{5}{7}e^{\frac{7}{5}t} - \frac{5}{7}e^{\frac{7}{5}(0)}\right)$$

$$x(t) = 4e^{-\frac{7}{5}t} + 3e^{-\frac{7}{5}t}\left(\frac{5}{7}e^{\frac{7}{5}t} - \frac{5}{7}\right)$$

$$x(t) = 4e^{-\frac{7}{5}t} + \frac{15}{7} - \frac{15}{7}e^{-\frac{7}{5}t}$$

$$x(t) = \frac{15}{7} + \frac{13}{7}e^{-\frac{7}{5}t}$$

Ejemplo 2

Respuesta total

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 68; \quad x(0) = 5; \dot{x}(0) = 7$$

Eigenvalores

$\lambda_1 = -3 + 5j$ y $\lambda_2 = -3 - 5j$

$$x_h(t) = e^{\alpha t}(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t))$$

Ejemplo 2

$$x_h(t) = e^{-3t}(k_1 \cos(5t) + k_2 \sin(5t))$$

Para encontrar los valores k_1 y k_2 se deriva la solución homogénea.

$$\dot{x}_h(t) = -5e^{-3t}k_1 \sin(5t) - 3e^{-3t}k_1 \cos(5t) + 5e^{-3t}k_2 \cos(5t) - 3e^{-3t}k_2 \sin(5t)$$

Se evalúa la solución homogénea y su derivada cuando $t = 0$.

$$x_h(0) = e^{-3(0)}(k_1 \cos(5(0)) + k_2 \sin(5(0)))$$

$5 = k_1$

$\dot{x}_h(0) = -5e^{-3(0)}k_1 \sin(0) - 3e^{-3(0)}k_1 \cos(0) + 5e^{-3(0)}k_2 \cos(0) - 3e^{-3(0)}k_2 \sin(0)$

$7 = -3k_1 + 5k_2 \implies k_2 = \frac{22}{5}$

Ejemplo 2

Solución homogénea

$$x_h(t) = e^{-3t}\left(5\cos(5t) + \frac{22}{5}\sin(5t)\right)$$

Representación en espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -34x_1 - 6x_2 + 68 \end{aligned}$$

Representación en espacio de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -34 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 68 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Ejemplo 2

La solución homogénea del primer estado es:

$$x_{1h}(t) = e^{-3t}\left(5\cos(5t) + \frac{22}{5}\sin(5t)\right)$$

Mientras que la solución homogénea para el segundo estado es la derivada de $x_{1h}(t)$, esto es

$$x_{2h}(t) = \dot{x}_{1h}(t) = e^{-3t}\left(7\cos(5t) - \frac{91}{5}\sin(5t)\right)$$

Ejemplo 3

Resolver el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son: $\lambda_1 = j$; $\lambda_2 = -j$; $\lambda_3 = -2$.
Para $\lambda = j$ se tiene

$$[\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda_1 + 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} j & -1 & 0 \\ 0 & j & -1 \\ 2 & 1 & j+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suponiendo $a = 1$ entonces $b = j$ y $c = -1$.

Para $\lambda = -j$ se tiene

$$[\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda_2 + 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -j & -1 & 0 \\ 0 & -j & -1 \\ 2 & 1 & -j + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$, entonces $b = -j$ y $c = -1$.
Para $\lambda = -j$ se tiene

$$[\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda_3 + 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$, entonces $b = -2$ y $c = 4$.
Los vectores propios son entonces

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \end{pmatrix} (\cos(t) - j\sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) - j\sin(t) \\ -j\cos(t) - \sin(t) \\ -\cos(t) + j\sin(t) \end{pmatrix}$

Entonces las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}_a$ son las soluciones con valores reales:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Adicionalmente,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

La solución homogénea del sistema es

$$\mathbf{x}_h = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

donde c_1, c_2 y c_3 son las condiciones iniciales.

Factorizando la solución homogénea se tiene

$$\mathbf{x}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 1e^{-2t} \\ -\sin(t) & -\cos(t) & -2e^{-2t} \\ -\cos(t) & \sin(t) & 4e^{-2t} \end{pmatrix}}_{e^{At}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

donde e^{At} es la matriz de transición. Sustituyendo c_1, c_2 y c_3, se tiene

$$\mathbf{x}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & e^{-2t} \\ -\sin(t) & -\cos(t) & -2e^{-2t} \\ -\cos(t) & \sin(t) & 4e^{-2t} \end{pmatrix}}_{e^{At}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Respuesta total

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & e^{-2t} \\ -\sin(t) & -\cos(t) & -2e^{-2t} \\ -\cos(t) & \sin(t) & 4e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) & e^{-2(t-\tau)} \\ -\sin(t-\tau) & -\cos(t-\tau) & -2e^{-2(t-\tau)} \\ -\cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) & 4e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) + 3e^{-2t} \\ -\sin(t) - 2\cos(t) - 6e^{-2t} \\ -\cos(t) + 2\sin(t) + 12e^{-2t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) + 3e^{-2t} \\ -\sin(t) - 2\cos(t) - 6e^{-2t} \\ -\cos(t) + 2\sin(t) + 12e^{-2t} \end{pmatrix} + \left.\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}e^{2\tau} \\ -e^{-2t}e^{2\tau} \\ 2e^{-2t}e^{2\tau} \end{pmatrix}\right|_0^t$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) + 3e^{-2t} \\ -\sin(t) - 2\cos(t) - 6e^{-2t} \\ -\cos(t) + 2\sin(t) + 12e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}(e^{2t} - 1) \\ -e^{-2t}(e^{2t} - 1) \\ 2e^{-2t}(e^{2t} - 1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) + 3e^{-2t} \\ -\sin(t) - 2\cos(t) - 6e^{-2t} \\ -\cos(t) + 2\sin(t) + 12e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -1 + e^{-2t} \\ (2 - 2e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) + \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ -\sin(t) - 2\cos(t) - 5e^{-2t} - 1 \\ -\cos(t) + 2\sin(t) + 10e^{-2t} + 2 \end{pmatrix}$$

Questions?

ftorreso@iingen.unam.mx
http://lizeth-torres.info