Dinámica de Sistemas Físicos - T2

(Tema 1, 2018)

Profesora: Dra. Lizeth Torres

ftorreso@iingen.unam.mx
http://lizeth-torres.info/

6th April 2020

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Contenido

Sistemas de 1er orden

Se caracterizan principalmente por tener un elemento capaz de almacenar energía.

Un sistema de 1er orden LIT se representa por un modelo matemático de la forma

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t).$$

Normalizando con respecto a la derivada de mayor orden, se tiene:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{a_0}{a_1} x(t) = \frac{1}{a_1} f(t).$$

Haciendo las siguientes asignaciones:

$$b_0 = \frac{a_0}{a_1}, b_1 = \frac{1}{a_1},$$

entonces el modelo se expresa de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) = b_1 f(t).$$

Sistemas de 1er orden

$$\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) = b_1 f(t).$$

donde:

b_0: es la frecuencia natural del sistema.

b_1: es el factor que afecta la excitación externa o entrada aplicada al sistema.

$f(t)$: es la excitación externa o entrada aplicada al sistema.

$x(t)$: es la variable de estudio o interés del sistema considerado.

Sistemas de 1er orden

Tipos de respuesta

La respuesta de un sistema depende de sus características propias, su estado inicial y la excitación externa o entrada aplicada a éste.

La respuesta completa o total $y(t)$ de un sistema diferencial LIT consiste de dos soluciones.

$$y(t) = y_{ci}(t) + y_u(t)$$

Los tipos de respuesta con base en las condiciones mencionadas son:

- Libre
- Forzada
- Total
- Permanente
- Transitoria

Sistemas de 1er orden

Tipos de respuesta

Respuesta libre: $y_{ci}(t)$

Es aquella que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada es cero y su estado inicial es diferente a cero.

$y_{ci}(t)$: es la solución homogénea, llamada también respuesta natural, respuesta libre, o respuesta de entrada cero. Esta respuesta se debe exclusivamente a las energías almacenadas en los elementos del sistema.

Sistemas de 1er orden

Tipos de respuesta

Respuesta forzada: $y_u(t)$

Es aquélla que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada a éste es distinta de cero y su estado inicial es nulo.

$y_u(t)$: es la respuesta de la ecuación diferencial no homogénea debida a una entrada particular y se le conoce como solución particular, respuesta forzada o respuesta de estado cero, dado que las energías en los elementos se consideran cero.

Sistemas de 1er orden

Tipos de respuesta

Respuesta permanente

Este tipo de respuesta, denominada también respuesta en estado estable, es la que produce el sistema después de que ha transcurrido un cierto tiempo (generalmente grande). Se obtiene aplicando la expresión:

$$y_{per}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

La respuesta permanente depende de la entrada aplicada al sistema, de su estado inicial y de tiempos grandes.

Sistemas de 1er orden

Tipos de respuesta

Respuesta transitoria

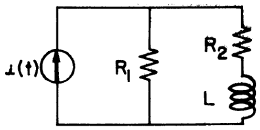
Es aquella que produce el sistema antes de alcanzar su estado estable; por otra parte se tiene que la respuesta total es la suma algebraica de la permanente y la transitoria, esto es:

$$y(t) = y_{tran}(t) + y_{per}(t)$$

La respuesta transitoria depende de la excitación externa aplicada y el estado inicial del sistema.

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta



$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\, i(t)$$

$R_1 = 0.5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$; $L = 500$ mH; $i(t) = 50 + 10\sin(t)$ A; $i_L(0) = 5$ A.

Ejercicio 1

Sustituyendo los valores, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{di_L}{dt} + 21i_L = 50 + 10\sin(t)$$

Renombrando a i_L como x, la ecuación previa se reescribe así

$$\frac{dx}{dt} + 21x = 50 + 10\sin(t)$$

Respuesta Libre

$$x = K_1 e^{-21t}$$

$$x(0) = K_1 e^{-21(0)} = 5$$

$$x_{lib} = 5e^{-21t}$$

Ejercicio 1

Respuesta permanente

$$x = k_3 + k_4 \cos(t) + k_5 \sin(t)$$

$$\dot{x} = -k_4 \sin(t) + k_5 \cos(t)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones de arriba en la ecuación diferencial

$$\dot{x} + 21x = 50 + 10 \sin(t),$$

se tiene

$$-k_4 \sin(t) + k_5 \cos(t) + 21k_3 + 21k_4 \cos(t) + 21k_5 \sin(t) = 50 + 10 \sin(t)$$

Factorizando con respecto a $\cos(t)$, $\sin(t)$ y los valores constantes, se tiene

Ejercicio 1

$$21k_3 + \cos(t)(21k_4 + k_5) + \sin(t)(-k_4 + 21k_5) = 50 + 10\sin(t)$$

Utilizando los factores para formar un sistema de ecuaciones algebraicas se tiene

$$\begin{aligned} 21k_4 + k_5 &= 0 \\ -k_4 + 21k_5 &= 10 \\ 21k_3 &= 50 \end{aligned}$$

$$k_3 = 2.3810,\ k_4 = -0.0226,\ k_5 = 0.4751.$$

La respuesta permanente se lee

$$x_{per} = 2.3810 - 0.0226\cos(t) + 0.4751\sin(t)$$

Ejercicio 1

Respuesta Forzada

Para calcular la respuesta forzada se suma la respuesta libre más la respuesta permanente, pero k_1 se vuelve a calcular en el instante $t = 0$ considerando que la C.I $x(0) = 0$.

$$x(0) = k_1 e^{-21(0)} + 2.3810 - 0.0226\cos(0) + 0.4751\sin(0)$$

$$0 = k_1 + 2.3810 - 0.0226$$

$$k_1 = -2.3810 + 0.0226 = -2.3584$$

$$x_{for} = -2.3584e^{-21t} + 2.3810 - 0.0226\cos(t) + 0.4751\sin(t)$$

Ejercicio 1

Respuesta Total

La respuesta total es la suma de la respuesta libre + la respuesta forzada, i.e.

$$x_{tot} = 5e^{-21t} - 2.3584e^{-21t} + 2.3810 - 0.0226\cos(t) + 0.4751\sin(t)$$

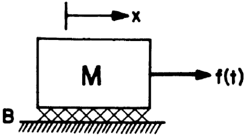
$$x_{tot} = 2.6416e^{-21t} + 2.3810 - 0.0226\cos(t) + 0.4751\sin(t)$$

Respuesta Transitoria

$$x_{tran} = 2.6416e^{-21t} + 2.3810$$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta



$$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M} v = \frac{1}{M} f(t)$$

$M = 600$ Kg; $B = 3000$ Ns/m; $f(t) = 600$ N; $v(0) = 1$ m/s.

Ejercicio 2

Sustituyendo los valores, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + 5v = 1$$

Respuesta Libre

$$v_{lib} = k_1 e^{-5t}$$

$$v_{lib} = e^{-5t}$$

Respuesta Permanente

$$v = k_2$$

$$\dot{v} = 0$$

Sustituyendo las dos ecuaciones de arriba en la ecuación diferencial, se tiene

$$5k_2 = 1$$

$$k_2 = 1/5 = 0.2$$

$$v_{per} = 0.2$$

Ejercicio 2

Respuesta Forzada

Para calcular la respuesta forzada se suma la respuesta libre más la respuesta permanente, pero k_1 se vuelve a calcular en el instante $t = 0$ considerando que la C.I $v(0) = 0$.

$$v(0) = k_1 e^{-5t} + 0.2 = 0$$

$$k_1 = -0.2$$

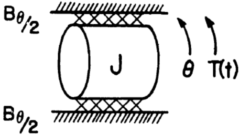
$$v_{for} = 0.2 - 0.2e^{-5t}$$

Respuesta Total

$\text{v}_{tot} = e^{-5t} + 0.2 - 0.2e^{-5t} = 0.2 + 0.8e^{-5t}$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta



$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{J}\,\omega = \frac{1}{J}\,T(t)$$

$\mathcal{J} = 8$ Nm/(rad/s^2); $B_\theta = 1.5$ Nm/(rad/s); $T(t) = 600\sin(t)$ Nm; $\omega(0) = 10.5$ rad/s.

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

Tipo de entrada: periódica con offset.

Método recomendado: coeficientes indeterminados .

SOLUCIÓN

Respuesta libre (respuesta de entrada cero):

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{\mathcal{J}}\omega = \frac{1}{\mathcal{J}}600\sin(t)$$
$$\frac{d\omega}{dt} + 0.1875\omega = 75\sin(t)$$

Polo: $-0.1875 \implies \omega_{ci} = K_1 e^{-0.1875t}$

Evaluando ω_{ci} en $t = 0$ se tiene que

$$\omega_{ci}(0) = K_1 e^{(-0.1875(0))} = 10.5 \implies K_1 = 10.5$$

$$\boxed{\omega_{ci} = 10.5e^{-0.1875t}}$$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

Tipo de entrada: periodica sin offset.

Método recomendado: coeficientes indeterminados .

SOLUCIÓN

Respuesta libre (respuesta de entrada cero):

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{\mathcal{J}}\omega = \frac{1}{\mathcal{J}}600\sin(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + 0.1875\omega = 75\sin(t)$$

Polo: $-0.1875 \implies \omega_{ci} = K_1 e^{-0.1875t}$

Evaluando ω_{ci} en $t = 0$ se tiene que

$$\omega_{ci}(0) = K_1 e^{(-0.1875(0))} = 10.5 \implies K_1 = 10.5$$

$$\boxed{\omega_{ci} = 10.5e^{-0.1875t}}$$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

Respuesta permanente:

Nota: Dado que la entrada exógena del sistema es periodica, la respuesta permanente también será periodica.

Se propone una solución:

$$\omega_{per} = K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$

cuya derivada es

$$\frac{d\omega_{per}}{dt} = K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t).$$

Tanto la solución propuesta como su derivada se sustituyen en la ecuación diferencial de primer orden para obtener la siguiente relación

$$K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t) + 0.1875 K_2 \sin(t) + 0.1875 K_3 \cos(t) = 75 \sin(t),$$

la que factorizada con respecto al seno y coseno se expresa así:

$$\cos(t)(K2 + 0.1875K3) + \sin(t)(0.1875K_2 - K_3) = 75 \sin(t).$$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

A partir de la expresión anterior se formula el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$K2 + 0.1875K3 = 0,$$
$$0.1875K_2 - K_3 = 75\sin(t),$$

cuya solución es $K_2 = 13.58$ y $K_3 = -72.45$, de tal manera que la respuesta permanente es:

$$\boxed{\omega_{per} = 13.58\sin(t) - 72.45\cos(t)}$$

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

Respuesta forzada:

Se vuelve a clacular K_1 pero considerando la respuesta permanente y la condición inicial igual a cero, i.e,

$$\omega(0) = K_1 e^{-0.1875(0)} + 13.58\sin(0) - 72.45\cos(0) = 0 \implies K_1 = 72.45$$

La respuesta forzada sera

$$\boxed{\omega_u = 72.45e^{-0.1875t} + 13.58\sin(t) - 72.45\cos(t)}$$

Respuesta total:

La respuesta total es la suma de la respuesta libre y la respuesta forzada, entonces:

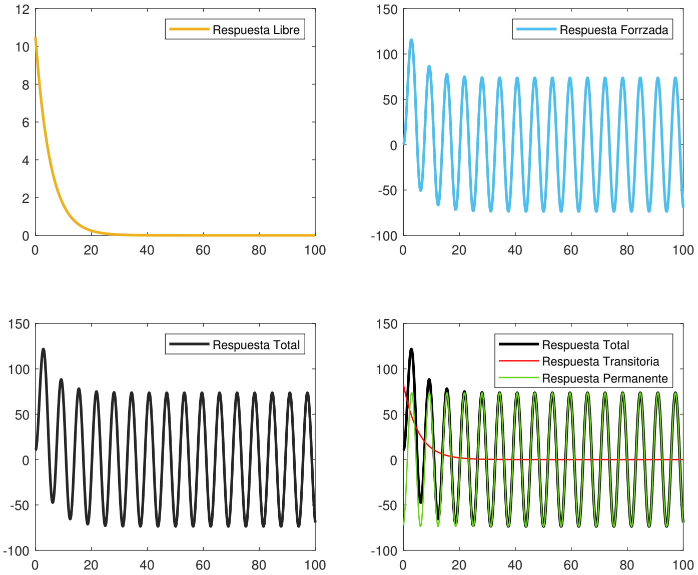
$$\boxed{\omega = 82.95e^{-0.1875t} + 13.58\sin(t) - 72.45\cos(t)}$$

Respuesta transitoria

$$\boxed{\omega_{trans} = 82.95e^{-0.1875t}}$$

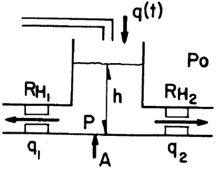
Ejercicio 3

```
t=0:0.1:100;

%Respuesta libre
w_lib=10.5*exp(-0.1875*t);

%Respuesta premanente
w_per=13.58*sin(t)-72.45*cos(t);

%Respuesta forzada
w_for=72.45*exp(-0.1875*t)+w_per;

%Respuesta total
w=w_lib+w_for;

%Respuesta transitoria
w_tran=w-w_per;

subplot(2,2,1);plot(t,w_lib,'b')
subplot(2,2,2);plot(t,w_for,'r')
subplot(2,2,3);plot(t,w)
subplot(2,2,4);hold on;plot(t,w,'k');plot(t,w_tran,'r');plot(t,w_per,'b')
```


Respuesta Libre
Respuesta Forrzada
Respuesta Total
Respuesta Total
Respuesta Transitoria
Respuesta Permanente
12
10
8
6
4
2
0
150
100
50
0
-50
-100
0
20
40
60
80
100

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta

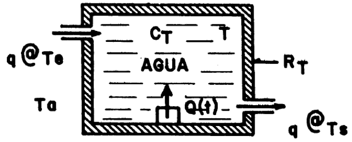


$$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right] h = \frac{1}{A} q(t)$$

$R_{H1} = 4 \times 10^5$ Pa.s/m; $R_{H2} = 5 \times 10^5$ Pa.s/m; $\gamma = 9.81 \times 10^3$ Kg/m^2.s^2; $A = 9$ m^2; $q(t) = 0.2 + 0.155 \sin(t)$ m^3/s; $h(0) = 0.5$ m.

Sistemas de 1er orden

Ejercicios: Tipos de respuesta



$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right] T = \frac{1}{C_T} Q(t)$$

$$T_a = T_e = 0$$

$$K = q s \rho$$

$K = 14 \times 10^3$ W/K; $R_T = 1 \times 10^{-4}$ K/W; $C_T = 42 \times 10^6$ W.s/K;
$Q(t) = 8 \times 10^6$ W; $T(0) = 290$ K

Ejercicio 4

$$\dot{x} + b_0 x = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(k\omega t\right) + b_k \sin\left(k\omega t\right)\right), \quad x(0) = x_0$$

Respuesta Libre

$$x_{lib} = x_0 e^{-b_0 t}$$

Respuesta Permanente

Se propone la siguiente solución:

$$x = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos\left(k\omega t\right) + B_k \sin\left(k\omega t\right)\right),$$

cuya derivada es la siguiente:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{n} \left(-k\omega A_k \sin\left(k\omega t\right) + k\omega B_k \cos\left(k\omega t\right)\right).$$

Ejercicio 4

Sustituyendo x y $\dot{x}$ en la ecuación diferencial de primer orden, se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-k\omega A_k \sin\left(k\omega t\right) + k\omega B_k \cos\left(k\omega t\right)\right)\right) + b_0\left(A_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(A_k \cos\left(k\omega t\right) + B_k \sin\left(k\omega t\right)\right)\right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(k\omega t\right) + b_k \sin\left(k\omega t\right)\right)$$

Factorizando, la ecuación diferencial deviene

$$b_0 A_0 + \left(\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k\omega t\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k\omega B_k + b_0 A_k\right)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\omega t\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-k\omega A_k + b_0 B_k\right)\right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(k\omega t\right) + b_k \sin\left(k\omega t\right)\right)$$

Ejercicio 4

Con los factores se forma un conjunto de sub-sistemas de ecuaciones algebraicas, i.e.

$$\begin{aligned}
b_0 A_0 &= a_0 \\
k\omega B_1 + b_0 A_1 &= a_1 \\
b_0 B_1 - \omega A_1 &= b_1 \\
k\omega B_2 + b_0 A_2 &= a_2 \\
b_0 B_2 - \omega A_2 &= b_2 \\
\vdots &= \vdots \\
k\omega B_n + b_0 A_n &= a_n \\
b_0 B_n - \omega A_n &= b_n
\end{aligned}$$

Resolviendo los subsistemas, se tienen la siguientes soluciones

$$A_0 = a_0/b_0 = \alpha_0, A_1 = \alpha_1, B_1 = \beta_1, A_2 = \alpha_2, \beta_2 = \beta_2, \ldots, A_n = \alpha_n, \beta_n = \beta_n$$

Ejercicio 4

La respuesta permanente es entonces:

$$x_{per} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\left(k\omega t\right) + \beta_k \sin\left(k\omega t\right)\right).$$

Respuesta Forzada

$$0 = K_1 e^{-b_0(0)} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\left(k\omega(0)\right) + \beta_k \sin\left(k\omega(0)\right)\right).$$

$$0 = K_1 + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\right).$$

$$K_1 = -\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

$$x_{for} = K_1 e^{-b_0 t} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\left(k\omega t\right) + \beta_k \sin\left(k\omega t\right)\right).$$

Ejercicio 4

$$x_{for} = \left(-\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) e^{-b_0 t} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\left(k\omega t\right) + \beta_k \sin\left(k\omega t\right)\right).$$

Respuesta Total

$$x_{tot} = x_0 e^{-b_0 t} - \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) e^{-b_0 t} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos\left(k\omega t\right) + \beta_k \sin\left(k\omega t\right)\right).$$

Tarea:

$$4\dot{x} + 5x = 4 + 2\cos\left(3t\right) + \sin\left(3t\right) + 6\cos\left(6t\right) - 8\sin\left(6t\right)$$

Sistemas de 2do orden

Los sistemas de segundo orden se caracterizan por contener dos elementos capaces de almacenar energía y se pueden modelar matemáticamente utilizando la siguiente ecuación diferencial:

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = g(t),$$

la cual puede expresarse en forma normalizada con respecto al coeficiente de la derivada de mayor orden como:

$$\frac{d^2x(t)}{dt} + \frac{a_1}{a_2}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{a_0}{a_2}x(t) = \frac{1}{a_2}g(t).$$

Definiendo los coeficientes de la forma: $a_1/a_2 = b_1$, $a_0/a_2 = b_0$ y $1/a_2 = c_0$, se tiene

Sistemas de segundo orden

$$\frac{d^2x(t)}{dt} + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0x(t) = c_0g(t).$$

Debido a que la ecuación característica de una ecuación diferencial de segundo orden es una ecuación cuadrática de la forma:

$$m^2 + b_1m + b_0 = 0$$

existen dos valores de m que la satisfacen, esto es, la ecuación tiene dos raíces y están dadas por:

$$m_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}$$

Los coeficientes b_1 y b_0 están definidos por las expresiones:

$$b_1 = 2\alpha, b_0 = \omega_n^2, \alpha = \xi\omega_n$$

Sistemas de segundo orden

α : es la constante de amortiguamiento del sistema.
ω_n : es la velocidad angular no amortiguada del sistema.
ξ : es el factor de amortiguamiento relativo del sistema.
Sustituyendo α, ω_n y ξ en las soluciones se tiene

$$m_{1,2} = -\alpha \pm \omega_n \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2},$$

$$m_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Sistemas de segundo orden

Puesto que son dos valores de m que satisfacen a la ecuación de 2do orden, existen cuatro posibles casos para las raíces, éstos son:

1. Raíces reales diferentes $(b_1^2 > 4b_0)$ $(\alpha > \omega_n$ ó $\xi > 1)$ $\implies$ Comportamiento sobreamortiguado
2. Raíces reales iguales $(b_1^2 = 4b_0)$ $(\alpha = \omega_n$ ó $\xi = 1)$ $\implies$ Comportamiento criticamente amortiguado
3. Raíces complejas $(b_1^2 < 4b_0)$ $(\alpha < \omega_n$ ó $0 < \xi < 1)$ $\implies$ Comportamiento subamortiguado
4. Raíces imaginarias $(b_1 = 0)$ $(\alpha = 0$ ó $\xi = 0)$ $\implies$ Comportamiento no amortiguado

Sistemas de segundo orden

- Comportamiento sobreamortiguado:

$$x(t) = K_1 e^{m_1 t} + K_2 e^{m_2 t}$$

- Comportamiento críticamente amortiguado:

$$x(t) = (K_1 + K_2 t) e^{mt}$$

- Comportamiento subamortiguado:

$$x(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$$

- Comportamiento no amortiguado: $x(t) = K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)$

β es la parte imaginaria de una raiz compleja.

Solución de un sistema de segundo orden

$$\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t) = g(t)$$

Las condiciones iniciales del sistema son: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. La excitación externa es: $g(t) = (b_0 - 1)\sin(t)$. Los valores de los coeficientes son:
a) $b_1 = 5$, $b_0 = 6$.

Sustituyendo valores se tiene

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 6x(t) = 5\sin(t)$$

La ecuación característica está dada por

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

cuyas soluciones (polos), obtenidas vía la ecuación chicharronera, son:

$$m_1 = -2, m_2 = -3$$

Solución de un sistema de segundo orden

Dado que las raíces son reales y distintas, la solución homogénea del sistema o respuesta libre está dada por:

$$x^{libre}(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$$

Para obtener el valor de los coeficientes K_1 y K_2, se deriva la solución homogénea.

$$\dot{x}^{libre}(t) = -2K_1 e^{-2t} - 3K_2 e^{-3t}$$

Después, la solución y su derivada son evaluadas en cero e igualadas a las condiciones iniciales.

$$x^{libre}(0) = K_1 e^{-2(0)} + K_2 e^{-3(0)} = K_1 + K_2 = 0$$

$$\dot{x}^{libre}(0) = -2K_1 e^{-2(0)} - 3K_2 e^{-3(0)} = -2K_1 - 3K_2 = 1$$

Solución de un sistema de segundo orden

Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas resultante de la evaluación de las condiciones iniciales.

$$K_1 = 1, K_2 = -1$$

La respuesta libre de acuerdo a las condiciones iniciales es:

$$x^{libre}(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

Solución de un sistema de segundo orden

Respuesta permanente

Debido a que la excitación es una función senoidal, la solución que se propone es:

$$x^{perm}(t) = K_3 \sin(t) + K_4 \cos(t)$$

derivando la solución propuesta (tantas veces como el orden de la ecuación diferencial), se tiene

$$\dot{x}^{perm}(t) = K_3 \cos(t) - K_4 \sin(t),$$

$$\ddot{x}^{perm}(t) = -K_3 \sin(t) - K_4 \cos(t).$$

Tanto la solución propuesta como sus derivadas se sustituyen en la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$(5K_3 - 5K_4) \sin(t) + (5K_3 + 5K_4) \cos(t) = 5 \sin(t)$$

Solución de un sistema de segundo orden

A partir de la factorización de la ecuación anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebráicas:

$$K_3 - K_4 = 1,$$

$$K_3 + K_4 = 0,$$

cuya solución es: $K_3 = 0.5$ y $K_4 = -0.5$. Así pues, la solución particular está dada por la siguiente ecuación:

$$x^{perm}(t) = 0.5\sin(t) - 0.5\cos(t)$$

Solución de un sistema de segundo orden

Respuesta total

Para obtener la respuesta total, se suma a la respuesta libre (sin los coeficientes evaluados) y la respuesta permanente, esto es

$$x^{total}(t) = K_1 e^{-2t} + K_2^{-3t} + 0.5\sin(t) - 0.5\cos(t)$$

Para evaluar K_1 y K_2 es necesario derivar la ecuación anterior y emplear las condiciones iniciales del sistema:

$$\dot{x}^{total}(t) = -2K_1 e^{-2t} - 3K_2 e^{-3t} + 0.5\cos(t) + 0.5\sin(t)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, se obtiene un sistema de ecuaciones simultaneas para evaluar K_1 y K_2, esto es:

Solución de un sistema de segundo orden

$$K_1 + K_2 = 0.5$$

$$-2K_3 - 3K_2 = 0.5$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que los valores de K_1 y K_2 son:

$$K_1 = 2$$

$$K_2 = -1.5$$

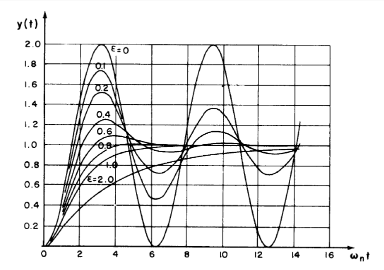
Así pues la solución general o respuesta total del sistema está descrita por la siguiente ecuación:

$$x^{total}(t) = 2e^{-2t} - 1.5^{-3t} + 0.5\sin(t) - 0.5\cos(t)$$

Respuesta escalón

Para obtener la respuesta escalón es necesario que el estado inicial del sistema sea nulo y que la excitación externa aplicada sea la función escalón unitario.

La respuesta escalón de un sistema de segundo orden varía de acuerdo con el factor de amortiguamiento relativo, por lo tanto es posible hacer gráficas normalizadas para diferentes valores de dicho factor.



Parámetros de diseño

A partir de la respuesta escalón, se pueden determinar algunas características del sistema que, en el estudio y análisis de sistemas dinámicos, han sido denominadas como parámetros de diseño, ya que reflejan la rapidez con la que el sistema responde.

Loz parámetros de diseño son:

- Tiempo de retardo
- Tiempo de levantamiento
- Sobrepaso
- Tiempo de sobrepaso
- Tiempo de asentamiento

Parámetros de diseño

Tiempo de retardo

Es el tiempo necesario para que la respuesta escalón del sistema alcance el 50% de su valor final y se representa por t_r.

Tiempo de levantamiento

Se define como el tiempo que transcurre desde que la respuesta escalón del sistema adquiere el 10% de su valor final hasta el tiempo en el que la respuesta escalón adquiere el 90% de su valor final y se representa por t_ℓ

Parámetros de diseño

Sobrepaso

Es la máxima desviación que alcanza el valor de la respuesta escalón del sistema sobre su valor final o valor en estado estable y se representa mediante M_p.

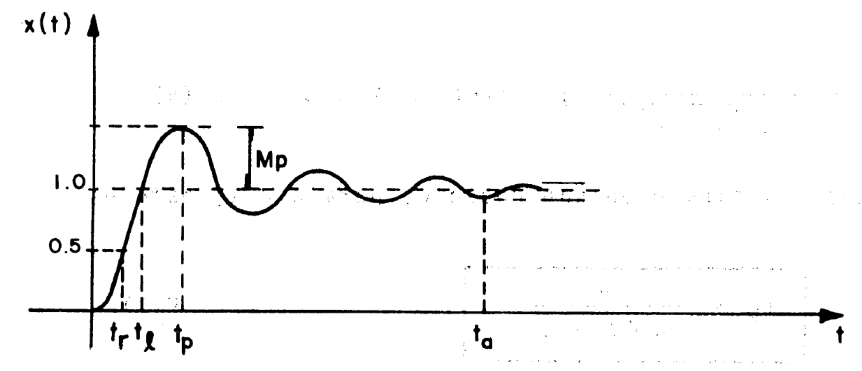
Tiempo de sobrepaso

Es el tiempo en el cual la respuesta escalón del sistema alcanza su valor máximo o sobrepaso y se representa por t_p.

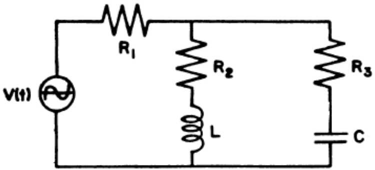
Tiempo se asentamiento

Es el tiempo mínimo en el que la respuesta escalón del sistema tiene variaciones entre el 90% y 105% de su valor final y se representa mediante t_a.

Parámetros de diseño



Parámetros de diseño



$R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right] \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = \frac{1}{2LC} V(t) + \frac{1}{2RC} \dot{V}(t)$$

- Comportamiento sobreamortiguado:
  $L = 500$ mH; $C = 220\ \mu$F; $R = 68\ \Omega$; $V(t) = 120\ U(t - t_u)$ V

Sistemas de orden superior

1. La respuesta libre de los sistemas de tercero y órdenes superiores consta de una suma de términos, uno por cada polo.
2. Por cada polo diferente existe un término exponencial real en la respuesta natural del sistema.
3. Por cada par de polos complejos conjugados, existe un par de términos complejos, los cuales pueden expresarse mejor mediante el producto de una exponencial y una senoide.
4. Los polos repetidos proporcionan términos adicionales que contienen potencias del tiempo multiplicadas por la exponencial.
5. Los parámetros de diseño también son representaciones útiles de los sistemas de orden superior.

Sistemas de orden superior

Un sistema de orden n, LIT y SISO tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} a_m(t)\frac{d^m u(t)}{dt^n}$$

$$a_M \frac{d^M y(t)}{dt^M} + a_{M-1}\frac{dM-1y(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_N \frac{d^N u(t)}{dt^N} + b_{N-1}\frac{dN-1u(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

La forma general de la solución homogénea de la ecuación diferencial de orden N con η polos distintos y $N-\eta$ polos múltiples es

$$y^{libre}(t) = \sum_{i=1}^{\eta} C_i e^{p_i t} + \sum_{i=\eta+1}^{N} C_i t^{i-N-1} e^{p_i t}$$

Función de transferencia

La dinámica de un sistema de orden N puede expresarse como una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_0}$$

donde $Y(s)$ es la salida del sistema y $U(s)$ es la entrada.

- El denominador es un polinomio en n que es conocido como ecuación característica o polinomio característico.
- Las raíces del denominador se conocen como **polos**.
- Las raíces del numerador son denominados **ceros** del sistema.

Función de transferencia

Factorizando el numerador y denominador se obtiene:

$$G(s) = \left(\frac{b_M}{a_N}\right) \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_N)}$$

donde
z_i=ceros de la función de transferencia.
p_i=polos de la función de transferencia.

Función de transferencia

Las raíces de la ecuación característica, los polos, deben ser reales o deben ocurrir como pares de complejos conjugados.

Estabilidad de un sistema evaluando sus polos

Las partes reales de todos los polos deben ser negativas para que el sistema sea estable.

Los ceros afectan la respuesta dinámica del sistema, pero no afectan su estabilidad.

Sistemas de orden superior

Se dice que una función de transferencia es propia si su grado relativo es mayor o igual a cero, y estrictamente propia si el grado relativo es mayor o igual a uno.

Se dice que una función es propia si el orden del polinomio característico es mayor que el polinomio del numerador.

Un sistema modelado por una función de transferencia propia es CAUSAL.

Un sistema modelado por una función de transferencia impropia es NO CAUSAL, ANTI-CAUSAL o ANTICIPATIVO.

Ejemplo: Sistema aticipativo

La función de transferencia de un sistema representado por $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$ es $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = s$.
Supóngase que la entrada del sistema es $u(t) = \sin(\omega t)$, entonces la

respuesta del sistema es $y(t) = \omega \cos(\omega t)$ que no es más que la misma señal seno amplificada y anticipada en el tiempo:

$$y(t) = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

¡¡La respuesta está adelantada en el tiempo a la entrada!!

Ejemplo: Sistema causal

La función de transferencia de un sistema representado por $y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$ es $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s}$.
Supóngase que la entrada del sistema es $u(t) = \sin(\omega t)$, entonces la

respuesta del sistema es

$$y(t) = \int_0^t \sin(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}\sin(\frac{\pi}{2} - \omega t)$$

que no es más que la misma señal seno atenuada y retrasada en el tiempo:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

La respuesta está atrasada en el tiempo a la entrada

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Considérese la siguiente función en el dominio de la frecuencia

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios en s y no poseen factores comunes. Supóngase que $F(s)$ es una función propia, es decir, que el grado de $N(s)$ es menor que el de $D(s)$.

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Supóngase que todas las raíces s_i, $i = 1, 2, ..., n$ del denominador $D(s)$ son distintas. Entonces $F(s)$ puede expandirse como una suma, es decir,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + ... + \frac{c_n}{s - s_n}$$

Para determinar el valor de c_i, se multiplican ambos miembros de la ecuación anterior por $(s - s_i)$ para obtener la ecuación:

$$(s - s_i)F(s) = (s - s_i)\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1(s - s_i)}{s - s_1} + ... + \frac{c_n(s - s_i)}{s - s_n}$$

i.e, se remueve del denominador el factor $s - s_i$. Evaluando ahora el resultado en $s = s_i$, se obtiene

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

$$c_i = (s - s_i)F(s)|_{s=s_i} = (s - s_i)\frac{N(s)}{D(s)}|_{s=s_i} = \frac{N(s)}{D'(s)}|_{s=s_i}$$

donde $D'(s_i) = [dD/ds]_{s=s_i} = [D(s)/(s - s_i)]_{s=s_i}$. Puesto que la transformada inversa de la fracción $1/(s - s_i)$ es igual a $e^{s_i t}$, de la ecuación

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

se concluye qye la transformada inversa de la función racional $F(s)$ es una suma de exponenciales:

$$f(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + c_n e^{s_n t}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ejercicio

Determine la transformada inversa de la función:

$$F(s) = \frac{s^2 + 29s + 30}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

Solución: El denominador de $F(s)$ es de mayor grado que el numerador y posee factores reales y distintos, estos son: $s_1 = 0$, $s_2 = -2$ y $s_3 = -5$. Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{s^2 + 29s + 30}{s(s+2)(s+5)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+5}$$

después

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

$$c_1 = sF(s)|_{s=0} = 3, c_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = 4,$$
$$c_3 = (s+5)F(s)|_{s=-5} = -6$$

Por lo tanto, a patir de las tablas,

$$f(t) = 3 + 4e^{-2t} - 6e^{-5t}, t > 0$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Supóngase que el polinomio $D(s)$ contiene factores lineales repetidos de la forma $(s-s_i)^m$. Entonces, la expansión de $F(s)$ en fracciones parciales consiste de términos de la forma:

$$\frac{c_{i1}}{s-s_i}+\frac{c_{i2}}{(s-s_i)^2}+\ldots+\frac{c_{im}}{(s-s_i)^m} \dashrightarrow (1)$$

donde los números c_{ij}, $j=1,2,\ldots,m$, son independientes de s y vienen dados por

$$c_{i,m-r}=\frac{1}{r!}\frac{d^r}{ds^r}\left[(s-s_i)^m F(s)\right]_{s=s_i},\ r=0,1,\ldots,m-1$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Así para evaluar el coeficiente $c_{i,m-r}$ se remueve el factor $(s-s_i)^m$ del denominador $F(s)$ y se evalúa la derivada $r-$ésima del resultado en $s=s_i$. La componente de $f(t)$ debida a la raíz múltiple s_i es la transformada inversa de la suma en (1) y viene dada por

$$c_{i1}e^{s_i t}+c_{i2}te^{s_i t}+\ldots+\frac{c_{im}}{(m-1)!}t^{m-1}e^{s_i t}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ejercicio

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_{21}}{s+5} + \frac{c_{22}}{(s+5)^2}$$

tiene un polo sencillo $s_1 = -3$ y un polo múltiple en $s_2 = -5$ con multiplicidad $m = 2$.

$$c_1 = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+5)^2}\Big|_{s=-3} = 2,\ c_{22} = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)}\Big|_{s=-5} = -10$$

$$c_{21} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 + 2s + 5}{s+3}\right)\Big|_{s=-5} = \frac{s^2 + 6s + 1}{(s+3)^2}\Big|_{s=-5} = -1$$

$$f(t) = 2e^{-3t} - (1 + 10t)e^{-5t},\ t > 0$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ejemplo: Raíces complejas

$$F(s) = \frac{5s + 13}{s\left(s^2 + 4s + 13\right)}$$

En este caso, $D(s)$ tiene dos polos complejos, $s_1 = -2 + j3$, $s_2 = -2 - j3$, y un polo real, $s_3 = 0$. Aplicando la expansión directa

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \ \ldots\ + \frac{c_n}{s - s_n} \tag{1}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Da

$$\frac{5s+13}{s\left(s^2+4s+13\right)} = \frac{c_1}{s-(-2+j3)} + \frac{c_2}{s-(-2-j3)} + \frac{c_3}{s}$$

donde $c_1 = -(1+j)/2$, $c_2 = -(1-j)/2$ y $c_3 = 1$. Por consiguiente,

$$f(t) = -\frac{1+j}{2}e^{(-2+j3)t} - \frac{1-j}{2}e^{(-2+j3)t} + 1, \qquad t > 0 \tag{2}$$

Esta expresión incluye cantidades complejas. Sin embargo, es una función real. Efectivamente insertando la identidad $e^{(-2\pm j3)t} = e^{-2t}(\cos 3t \pm j \sin 3t)$ en (Ec. 2), se obtiene

$$f(t) = 1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t), \qquad t > 0 \tag{3}$$

la cual es una expresión real.

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ahora se demostrará que la Ec. 3 puede determinarse directamente.
Considere una función racional $F(s)$ con coeficientes reales. Como se sabe, si $s_1 = \alpha + j\beta$ es un polo complejo de $F(s)$, entonces su conjugado, $s_1^* = \alpha + j\beta$, también es un polo. Por lo tanto la expansión de $F(s)$ contiene términos como

$$\frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2}, \qquad s_1 = \alpha + j\beta, \quad s_2 = \alpha - j\beta \tag{4}$$

Los coeficientes de c_1 y c_2 se expresarán en términos de la función

$$G(s) = \frac{F(s)}{j\beta}(s - s_1)(s - s_2) \tag{5}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

De la Ec. 6

$$c_i = (s - s_i)\; F(s)\big|_{s=s_i} \quad = (s - s_i)\; \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=s_i} \quad = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=s_i} \tag{6}$$

se obtiene que

$$c_1 = (s - s_1)\; F(s)\big|_{s=s_1} \quad = \frac{j\beta G(s_1)}{s - s_2} = \frac{1}{2}G(s_1)$$

La función $G(s_1)$ es, en general, compleja con parte real G_r y parte imaginaria G_i, es decir,

$$G(s_1) = G_r + jG_i \tag{7}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Como $F(s_2) = F*(s_1)$, de Ec. 5 se obtiene que $G(s_2) = G*(s_1) = G_r + jG_i$, y por lo tanto,

$$c_1 = \frac{1}{2}(G_r + jG_i), \qquad c_2 = \frac{1}{2}(G_r + jG_i)$$

La transformada inversa de la suma de la Ec. 4 es entonces igual a

$$c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = \frac{1}{2}(G_r + jG_i)e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{1}{2}(G_r + jG_i)e^{(\alpha - j\beta)t} \tag{8}$$

Insertando la identidad $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm j\sin\beta t)$ en la Ec. 8, se obtiene la transformada inversa $f(t)$ de $F(s)$ debida a los polos complejos conjugados s_1 y s_2, y la cual es igual a

$$e^{\alpha t}(G_r\cos\beta t - G_i\sin\beta t) \tag{9}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

El término correspondiente de $f(t)$ lo da la Ec. 9, donde G_r y G_i son las partes real e imaginaria de $G(s)$. El resultado se aplicará a la función

$$F(s) = \frac{5s+13}{s\left(s^2+4s+13\right)}$$

En este caso,

$$(s-s_1)(s-s_2) = s^2+4s+13, \qquad s_1 = -2+j3, \qquad s_2 = -2-j3, \qquad \alpha = -2, \qquad \beta = 3$$

$$G(s) = \frac{F(s)}{j\beta}(s^2+4s+13) = \frac{5s+13}{j3s}, \qquad G(s_1) = \frac{5(-2+j3)+13}{j3(-2+j3)}$$

Por tanto, $G_r = -1$, $G_i = -1$y la Ec. 9 da

$$e^{2t}(-\cos 3t + \sin 3t)$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ejemplo
Obtener la transformada de Laplace inversa de la función

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+9)\,(s+2)} = \frac{c_1}{s-j3} + \frac{c_2}{s+j3} + \frac{c_3}{s+2}$$

El coeficiente c_3 correspondiente al polo real $s_3 = -2$ se determina directamente a partir de la Ec. 6

$$c_3 = (s+2)\,F(s)\big|_{s=-2} = -\frac{2}{13}$$

Los otros dos polos $s_1 = j3$ y $s_2 = -j3$ de $F(s)$ son imaginarios puros con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$. Puesto que

$$(s-s_1)(s-s_2) = s^2 + 9$$

la función $G(s)$ correspondiente en la Ec. 5 está dada por

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

$$G(s) = \frac{F(s)}{j\beta}(s^2+9) = \frac{s}{j3(s+2)}$$

Por lo tanto,

$$G(s_1) = \frac{j3}{j3(j3+2)} = \frac{2}{13} - j\frac{3}{13}$$

Agregando el término $c_3 e^{-2t}$ debido al polo real $s_3 = -2$, se obtiene

$$f(t) = \frac{2}{3}\cos 3t + \frac{3}{13}\sin 3t - \frac{2}{3)}e^{-2t}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Ejemplo: Fracciones impropias

$$F(s) = \frac{3s^2 + 15s + 14}{s^2 + 3s + 2}$$

Dividiendo se obtiene

$$\frac{3s^2 + 15s + 14}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{6s + 8}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{2}{s + 1} + \frac{4}{s + 2}$$

y por tanto,

$$f(t) = 3\delta(t) + 2e^{-t} + 4e^{-2t}$$

Considérese otro ejemplo. Sea la función

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 8}{s^2 + 4}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

Entonces, procediendo de la misma forma que en el ejemplo previo, se obtiene

$$\frac{s^3+3s^2+s+8}{s^2+4} = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+4}$$

Y por lo tanto

$$f(t) = 3\delta'(t)\delta(t) + 2 + 3e^{-4t}$$

En general, para una función racional

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Transformación inversa por expansión en fracciones parciales

donde el grado de $N(s)$ es mayor o igual que el de $D(s)$, se procede a la división para obtener

$$F(s) = c_{m-n}s^{m-n} + ... + c_1 s + c_0 + \frac{Q(s)}{D(s)} = P(s) + \frac{Q(s)}{D(s)}$$

donde $P(s)$ es el cociente y $Q(s)$ es el residuo; m es el grado del numerador y n el del denominador($m > n$). Ahora el grado de $Q(s)$ es menor que el de $D(s)$. La nueva función racional $Q(s)/D(s)$ es propia y está preparada para su expansión. Se continua entonces con la expansión en fracciones parciales de $Q(s)/D(s)$ y luego se obtiene la transformada inversa de $F(s)$. Obsérvese que el polinomio $P(s)$ producirá funciones singulares. Éstas no aparecen con frecuencia, pero son de utilidad en la solución de algunos problemas prácticos.

Función de transferencia

¿Cómo generar una función de transferencia en MATLAB?

```
sistema=tf([1 8],[1 10 61])
```

¿Cómo crear un mapa de polos y ceros en MATLAB?

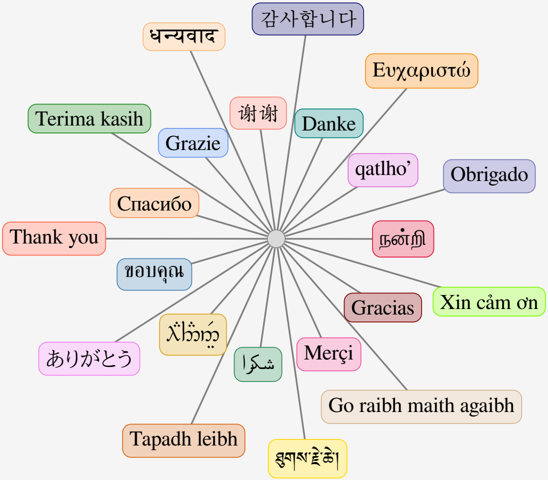
```
pzmap(sistema)
```

¿Cómo cálcular polos y ceros en MATLAB?

```
pole(sistema), zero(sistema)
```

¿Cómo graficar la respuesta de un sistema al impulso y al escalón unitario en MATLAB?

```
impulse(sistema), step(sistema)
```



Questions?

ftorreso@iingen.unam.mx

http://lizeth-torres.info