Observadores no lineales de gran ganancia

Dra. Flor Lizeth Torres Ortiz

5 de marzo 2012

Definición de observador

¿Qué es un observador?

Un observador de estados es un sistema dinámico capaz de reconstruir o estimar variables de interés de un proceso, a partir de un modelo dinámico y las mediciones disponibles del proceso.

Definición de observador

¿Qué es un observador?

Un observador de estados es un sistema dinámico capaz de reconstruir o estimar variables de interés de un proceso, a partir de un modelo dinámico y las mediciones disponibles del proceso.

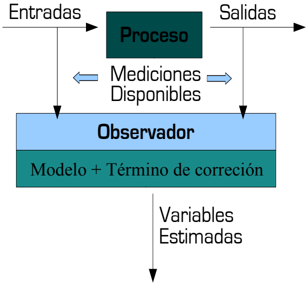

Figura 1: Observación

Definición de observador

¿Cuáles son los usos de un observador y sus ventajas?

- Estiman variables físicas que no se pueden medir por ausencia de instrumentación en el mercado.
- Efectúan estimaciones multiples, es decir, estiman parámetros de índole diversa al mismo tiempo y con un mismo algoritmo.
- Un observador no requiere mantenimiento o calibración como un instrumento real.

Definición de observador

¿Cuáles son los usos de un observador y sus ventajas?

- Estiman variables físicas que no se pueden medir por ausencia de instrumentación en el mercado.
- Efectúan estimaciones multiples, es decir, estiman parámetros de índole diversa al mismo tiempo y con un mismo algoritmo.
- Un observador no requiere mantenimiento o calibración como un instrumento real.

¿Dónde se utilizan las variables estimadas?

- En una ley de control de un proceso automatizado.
- En la supervisión de procesos con el fin de detectar problemas operacionales.
- En la sincronización de sistemas.

Definición de observador

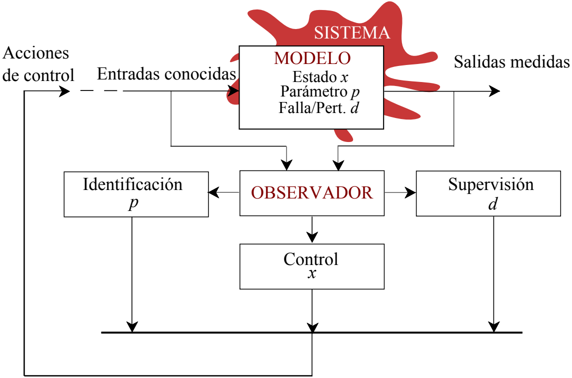

Figura 2: Observador visto como el núcleo de un sistema de control

Definición de observador

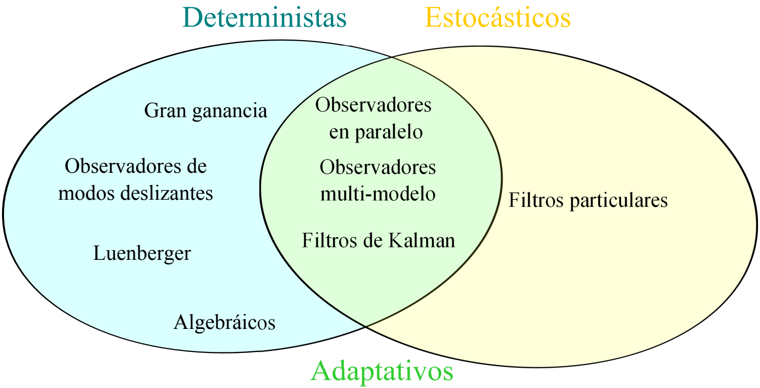

Figura 3: Clasificación de observadores

Definición de observador

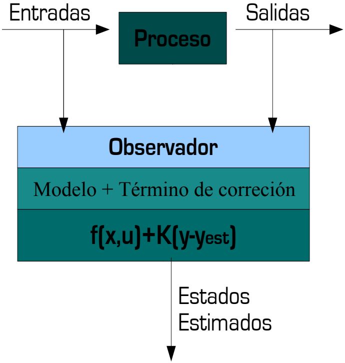

Figura 4: Constitución de un observador

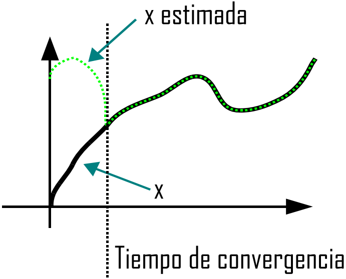

Figura 5: Convergencia

Definición de observador

Consideremos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

con $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ y $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

Definición de observador

Consideremos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \qquad (1)$$

con $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ y $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

Definición 1 (Observador)

Un observador para el sistema (2) es un sistema dinámico auxiliar cuyas entradas son las entradas y salidas del sistema (2), y las salidas, los estados $\hat{x}$. Tal sistema puede ser representado de la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F(X(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) &= H(X(t), u(t), y(t), t) \end{aligned}$$

Nociones de observabilidad

Definición 2 (Observabilidad)

Un sistema no lineal (2) es observable si todos sus estados son observables y pueden ser reconstruidos a partir de las salidas medidas.

Nociones de observabilidad

Definición 2 (Observabilidad)

Un sistema no lineal (2) es observable si todos sus estados son observables y pueden ser reconstruidos a partir de las salidas medidas.

Definición 3 (Condición de rango)

Un sistema con vector de estados x de dimensión n es observable si la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ tiene rango pleno.

Nociones de observabilidad

Definición 2 (Observabilidad)

Un sistema no lineal (2) es observable si todos sus estados son observables y pueden ser reconstruidos a partir de las salidas medidas.

Definición 3 (Condición de rango)

Un sistema con vector de estados x de dimensión n es observable si la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ tiene rango pleno.

Definición 4 (Entradas universales)

Una entrada para la que no existen estados inobservables.

Nociones de observabilidad

Definición 5 (Observabilidad U-uniforme)

Un sistema donde todas las entradas admisibles son universales se dice U-uniformemente observable.

Diseño de un observador de gran ganancia

Consideremos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \tag{2}$$

Diseño de un observador de gran ganancia

Consideremos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \tag{2}$$

Si el sistema (2) puede transformarse mediante un difeomorfismo

$$\Phi(x) : x \mapsto \xi \tag{3}$$

en el siguiente siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + \varphi(\xi, u) \\ y &= C\xi \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\xi, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, u) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n, u) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Observadores de gran ganancia

Entonces el sistema (2) es uniformemente observable y puede diseñarse un observador de gran ganancia.

Observadores de gran ganancia

Entonces el sistema (2) es uniformemente observable y puede diseñarse un observador de gran ganancia.

Observador de gran ganancia

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\xi}} &= A\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - S^{-1}C^T(\hat{y} - y) \\
0 &= -\lambda S - A^T S - SA + C^T C
\end{aligned}
$$

Observador de gran ganancia en coordenadas originales

$$
\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^{-1} S^{-1}C^T(\hat{y} - y)
$$

Observadores de gran ganancia

¿Cómo calcular el difeomorfismo o cambio de coordenadas?

Observadores de gran ganancia

¿Cómo calcular el difeomorfismo o cambio de coordenadas?
Una opción es calculando las derivadas de Lie a partir de las salidas medidas.

Observadores de gran ganancia

¿Cómo calcular el difeomorfismo o cambio de coordenadas?
Una opción es calculando las derivadas de Lie a partir de las salidas medidas.

$$\Phi : x \mapsto \quad \xi = [h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), L_f^3 h(x), ..., L_f^n h(x)]^T \tag{4}$$

Observadores de gran ganancia

¿Cómo calcular el difeomorfismo o cambio de coordenadas?
Una opción es calculando las derivadas de Lie a partir de las salidas medidas.

$$\Phi : x \mapsto \quad \xi = [h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), L_f^3 h(x), ..., L_f^n h(x)]^T \tag{4}$$

$$\Phi : x \mapsto \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n]^T \tag{5}$$

Observadores de gran ganancia

¿Cómo calcular el difeomorfismo o cambio de coordenadas?
Una opción es calculando las derivadas de Lie a partir de las salidas medidas.

$$\Phi : x \mapsto \quad \xi = [h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), L_f^3 h(x), ..., L_f^n h(x)]^T \tag{4}$$

$$\Phi : x \mapsto \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n]^T \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= h(x) \\
\xi_2 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x} f(x) \\
\xi_3 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x} f(x) \\
\xi_4 &= \frac{\partial \xi_3}{\partial x} f(x) \\
\vdots &= \vdots \\
\xi_n &= \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x} f(x)
\end{aligned}$$

Ejemplo de diseño

Consideremos el siguiente modelo que representa el comportamiento de un biorreactor:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{a_1 x_1 x_2}{a_2 x_1 + x_2} - u x_1 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{a_3 a_1 x_1 x_2}{a_2 x_1 + x_2} - u x_2 + u a_4 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Ejemplo de diseño

Consideremos el siguiente modelo que representa el comportamiento de un biorreactor:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{a_1 x_1 x_2}{a_2 x_1 + x_2} - u x_1 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{a_3 a_1 x_1 x_2}{a_2 x_1 + x_2} - u x_2 + u a_4 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

¿Cómo hacer el cambio de coordenadas?

Ejemplo de diseño

```
clear
clc
syms a1 a2 a3 x1 x2 T
f1=(a1*x1*x2)/(a2*x1+x2);
f2=-(a3*a1*x1*x2)/(a2*x1+x2);
f=[f1;f2];
z1=x1;
z2=[diff(z1,x1) diff(z1,x2)]*f;
pretty(z1)
pretty(z2)
```

Ejemplo de diseño

```
clear
clc
syms a1 a2 a3 x1 x2 T
f1=(a1*x1*x2)/(a2*x1+x2);
f2=-(a3*a1*x1*x2)/(a2*x1+x2);
f=[f1;f2];
z1=x1;
z2=[diff(z1,x1) diff(z1,x2)]*f;
pretty(z1)
pretty(z2)
```

¿Cómo calcular la matriz estática de Liapunov?

Ejemplo de diseño

$S = [S(l,k)]_{1 \leq l,k \leq n_i}$ es clásicamente calculada:

$$S(l,k) = \frac{(-1)^{l+k} C_{l+k-2}^{k-1}}{\theta^{l+k-1}} \tag{6}$$

donde el coeficiente binomial se define: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ and $\theta > 0$.

Ejemplo de diseño

$S = [S(l,k)]_{1\leq l,k\leq n_i}$ es clásicamente calculada:

$$S(l,k) = \frac{(-1)^{l+k} C_{l+k-2}^{k-1}}{\theta^{l+k-1}} \tag{6}$$

donde el coeficiente binomial se define: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ and $\theta > 0$.

```
n=2;
T=1;
for k=1:n
for l=1:n
c=nchoosek(l+k-2,k-1);
S(l,k)=((-1)ˆ(l+k)*c)/Tˆ(l+k-1);
end
end
```

Ejemplo de diseño

¿Cómo calcular el cambio a las coordenadas originales?

Ejemplo de diseño

¿Cómo calcular el cambio a las coordenadas originales?

```
O=[diff(z1,x1) diff(z1,x2);
diff(z2,x1) diff(z2,x2)];
OI=inv(O)
```

Ejemplo de diseño

Finalmente, ¿Cómo queda la ganancia del observador y el observador?

Ejemplo de diseño

Finalmente, ¿Cómo queda la ganancia del observador y el observador?

Observador de gran ganancia en coordenadas originales

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial\Phi(\hat{x})}{\partial\hat{x}}\right)^{-1} S^{-1}C^T(\hat{y} - y)$$

$$K = \left(\frac{\partial\Phi(\hat{x})}{\partial\hat{x}}\right)^{-1} S^{-1}C^T$$

Ejemplo de diseño

Finalmente, ¿Cómo queda la ganancia del observador y el observador?

Observador de gran ganancia en coordenadas originales

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^{-1} S^{-1} C^T (\hat{y} - y)$$

$$K = \left(\frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^{-1} S^{-1} C^T$$

```
K=OI*SI*C'
```